

Méthode des éléments finis pour les équations aux dérivées partielles

Rachid Touzani

Génie Mathématique et Modélisation - 4A

Janvier 2020

Table des matières

1	Formulation variationnelle de problèmes aux limites elliptiques	1
1.1	Formulation variationnelle d'un problème unidimensionnel	1
1.2	Théorème de Lax-Milgram	2
1.2.1	Quelques remarques	4
1.3	Autres problèmes variationnels	5
1.4	Le problème de l'élastostatique	7
2	Introduction à la méthode des éléments finis	11
2.1	Un problème unidimensionnel	11
2.1.1	Le problème approché	11
2.1.2	Formulation matricielle du problème approché	12
2.1.3	Convergence de la méthode	14
2.2	Méthode d'éléments finis en dimension deux	16
2.2.1	Formulation matricielle de la méthode	20
2.2.2	Formation du système linéaire par assemblage	21
2.2.3	Calcul de la matrice et du second membre élémentaires	22
2.2.4	Convergence de la méthode	23
2.3	Quelques exemples d'éléments finis	24
2.4	Méthode des éléments finis et intégration numérique	27
	Références	29

Formulation variationnelle de problèmes aux limites elliptiques

Dans ce chapitre nous supposons acquises les notions élémentaires sur les espaces de Sobolev.

1.1 Formulation variationnelle d'un problème unidimensionnel

Nous considérons, dans ce paragraphe, un problème modèle unidimensionnel. Nous notons par Ω l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$ et soit a une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\overline{\Omega}$. On suppose qu'il existe une constante positive a_0 telle que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (1.1)$$

Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(au')' = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.1.1 Si f est continue, on appellera solution classique du problème (1.2) toute fonction u de classe \mathcal{C}^2 vérifiant (1.2).

Définition 1.1.2 On appelle solution forte du problème (1.2) toute fonction $u \in H^2(]0, 1[)$ vérifiant (1.2) presque partout.

Formellement, multiplions l'équation ci-dessus par une fonction $v \in H_0^1(]0, 1[)$ et intégrons sur $(0, 1)$. Nous obtenons, en effectuant une intégration par parties :

$$\int_{\Omega} au'v' dx = \int_{\Omega} fv dx.$$

Notons que cette égalité a un sens dès que $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi, on est conduit à une nouvelle formulation du problème (1.2) :

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} au'v' dx = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.3)$$

Définition 1.1.3 On appelle le problème (1.3) *problème variationnel ou faible*.

Il est clair que, par construction, toute solution classique du problème (1.2) est solution du problème (1.3). Montrons la réciproque.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution du problème (1.3). Choisissons dans le problème $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. On trouve alors que

$$-(au')' = f \quad \text{au sens des distributions dans } \Omega.$$

Remarque 1.1.1 Puisque f est une fonction de $L^2(\Omega)$ et $u' \in L^2(\Omega)$ on a $au' \in H^1(\Omega)$. D'où $u \in H^2(\Omega)$, i.e., u est une solution forte du problème (1.2).

1.2 Théorème de Lax-Milgram

Nous allons énoncer un résultat préliminaire (sans démonstration) connu sous le nom de *théorème de représentation de Riesz*.

Théorème 1.2.1 Soit V un espace de Hilbert et soit V' son espace dual. Alors, pour toute forme linéaire continue φ sur V , il existe un unique élément $u \in V$ tel que :

$$\varphi(v) = (u, v)_V \quad \forall v \in V.$$

Un corollaire immédiat de ce résultat est que l'on peut identifier un espace de Hilbert et son espace dual.

Théorème 1.2.2 (Lax - Milgram) Soit V un espace de Hilbert et soit $B(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur $V \times V$, continue, i.e.

$$|B(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

et coercive, i.e.

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour toute forme linéaire continue L sur V , il existe un unique $u \in V$ tel que

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \tag{1.4}$$

Démonstration. Comme la forme $B(\cdot, \cdot)$ est continue, on en déduit que pour tout $u \in V$ l'application

$$Au : v \in V \mapsto B(u, v) \in \mathbb{R}$$

est une forme linéaire continue sur V , de norme $\leq M \|u\|_V$. En effet on a :

$$\|Au\|_{V'} := \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|_V} \leq M \|u\|_V.$$

Soit τ l'application linéaire et continue de V' dans V définie par le théorème de Riesz (cf. Théorème 1.2.1) par :

$$(\tau L, v)_V := L(v) \quad \forall L \in V', v \in V.$$

Le problème (1.4) est équivalent au problème :

$$u \in V, \quad \tau Au = \tau L.$$

Clairement, résoudre ce problème équivaut à trouver un point fixe de l'application :

$$v \in V \mapsto v - \rho(\tau Av - \tau L) \in V, \quad \rho > 0.$$

On a :

$$\|v - \rho \tau Av\|_V^2 = \|v\|_V^2 - 2\rho(\tau Av, v)_V + \rho^2 \|\tau Av\|_V^2.$$

Or

$$(\tau Av, v)_V = Av(v) = B(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2,$$

et

$$\begin{aligned} \|\tau Av\|_V^2 &= |Av(\tau Av)| = |B(v, \tau Av)| \\ &\leq M \|v\|_V \|\tau Av\|_V \\ &\leq M^2 \|v\|_V^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Donc

$$\|v - \rho \tau Av\|_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|v\|_V^2.$$

L'application ci-dessus est donc contractante si et seulement si $\rho < 2\alpha/M^2$. \square

Nous pouvons appliquer le théorème précédent au problème variationnel (1.3).

Théorème 1.2.3 *Le problème (1.3) admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. Nous appliquons le théorème de Lax-Milgram avec $V = H_0^1(\Omega)$ qui est clairement un espace de Hilbert. On définit :

$$L(v) := \int_0^1 f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Il est clair que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Soit la forme bilinéaire :

$$B(u, v) := \int_0^1 a u' v' \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Il est clair que $B(\cdot, \cdot)$ est continue. On a de plus grâce à l'inégalité (1.1) :

$$B(v, v) = \int_0^1 a (v')^2 \, dx \geq a_0 \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on déduit que la forme a est coercive. Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure. \square

1.2.1 Quelques remarques

1. L'hypothèse $f \in L^2(\Omega)$ peut être affaiblie. En effet, il suffit que $f \in (H_0^1(0, 1))'$, dual topologique de $H_0^1(0, 1)$.
2. Le problème variationnel (1.3) a un sens dès que $a \in L^\infty(\Omega)$.
3. Si $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Nous avons $au' \in C^1(\Omega)$. Or $u' = au'/a$. Donc $u \in C^2(\Omega)$. Dans ce cas, l'unique solution du problème variationnel vérifie

$$-(au')'(x) = f(x) \quad x \in \Omega.$$

En effet, s'il existait un réel $x \in \Omega$ tel que $w(x) := (a(x)u'(x))' + f(x)$ soit différent de zéro. On aurait par continuité de w , $w(y) \neq 0$ pour tout y dans un voisinage W de x . En choisissant dans la formulation variationnelle (1.3) une fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support inclus dans W on aurait

$$\int_{\Omega} (au'v' - fv) dx \neq 0,$$

ce qui est contradictoire avec (1.3).

Nous voulons maintenant donner une nouvelle caractérisation du problème (1.2). Pour cela, nous reprenons le cadre abstrait. Nous nous donnons un espace de Hilbert V , une forme bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ continue, coercive et *symétrique* sur $V \times V$ et une forme linéaire et continue L sur V .

Nous considérons le problème variationnel abstrait

$$u \in V, \quad B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (1.6)$$

On définit maintenant la fonction

$$J : v \in V \mapsto J(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - L(v) \in \mathbb{R}$$

dite *fonctionnelle d'énergie*. On considère le problème de minimisation suivant :

$$u \in V, \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v). \quad (1.7)$$

Théorème 1.2.4 *Les problèmes (1.6) et (1.7) sont équivalents.*

Démonstration. Soit u une solution du problème (1.7) et soit $\varepsilon > 0$ et v un élément quelconque de V . On a évidemment $u + \varepsilon v \in V$ et

$$J(u) \leq J(u + \varepsilon v).$$

Donc

$$\begin{aligned} J(u) &\leq \frac{1}{2}B(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - L(u + \varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2}B(u, u) - L(u) + \frac{\varepsilon}{2}B(u, v) + \frac{\varepsilon}{2}B(v, u) + \frac{\varepsilon^2}{2}B(v, v) - \varepsilon L(v). \end{aligned}$$

On utilise la symétrie de B et on obtient en divisant par ε :

$$0 \leq B(u, v) + \frac{\varepsilon}{2}B(v, v) - L(v).$$

Faisant tendre ε vers zéro on obtient :

$$B(u, v) - L(v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

En remplaçant v par $-v$, on obtient de la même manière :

$$B(u, v) - L(v) \leq 0 \quad \forall v \in V.$$

D'où l'égalité.

Montrons maintenant la réciproque.

Soit u une solution du problème (1.6) et soit $v \in V$ quelconque. On écrit $v = v - u + u$. D'où :

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}B(v - u + u, v - u + u) - L(v - u + u) \\ &= \frac{1}{2}B(v - u, v - u) + B(u, v - u) + \frac{1}{2}B(u, u) - L(v - u) - L(u) \\ &= J(u) + B(u, v - u) - L(v - u) + \frac{1}{2}B(v - u, v - u). \end{aligned}$$

Or $B(u, v - u) = L(v - u)$. D'où

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}B(v - u, v - u) \geq J(u) \quad \forall v \in V.$$

Ceci permet de conclure. \square

Remarque 1.2.1 Nous pouvons noter que la démonstration du théorème précédent n'utilise pas la coercivité de la forme $B(\cdot, \cdot)$. Elle utilise seulement le fait que $B(v, v) \geq 0$.

1.3 Autres problèmes variationnels

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N avec $N = 1, 2, 3$ de frontière Γ régulière. et soit f une fonction de l'espace $L^2(\Omega)$. On se donne le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée de u dans la direction de la normale extérieure à Γ .

Soit $v \in H^1(\Omega)$. Multiplions formellement la première équation par v et intégrons sur Ω en utilisant la formule de Green. Nous obtenons la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.9)$$

Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure par l'existence et l'unicité d'une solution du problème (1.9).

Nous considérons maintenant un nouveau problème de Neumann. Nous nous donnons une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et une fonction $g \in L^2(\Gamma)$. Nous nous donnons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.10)$$

Nous commençons par faire deux remarques :

1. Si u est une solution du problème (1.10) alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ la fonction $u + c$ est aussi une solution de ce problème. Nous devons donc tenir compte, dans le choix de l'espace fonctionnel dans lequel nous chercherons la solution, de ce fait.
2. En intégrant l'équation (1.10) et en utilisant la formule de Green, il vient :

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int_{\Gamma} g ds = \int_{\Omega} f dx.$$

Les fonctions f et g doivent donc satisfaire cette relation de compatibilité pour que la solution du problème variationnel soit celle du problème (1.10).

Nous définissons l'espace

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} v dx = 0\}.$$

L'espace $\tilde{H}^1(\Omega)$ est clairement un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. On munit cet espace de la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$. Nous définissons la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in \tilde{H}^1(\Omega), \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma} gv ds \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.11)$$

Avant de montrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème (1.11), nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 1.3.1 Sur $\tilde{H}^1(\Omega)$, la semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème 1.3.1 Le problème (1.11) admet une solution unique $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$.

Démonstration. Par le lemme 1.3.1, la forme bilinéaire

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

est continue et coercive. Il reste à montrer que la forme linéaire

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v ds$$

est continue sur $\tilde{H}^1(\Omega)$. Pour cela, il suffit de voir que le théorème de trace donne

$$\left| \int_{\Gamma} g v ds \right| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci achève la démonstration. \square

Nous voulons maintenant interpréter cette solution comme celle d'une équation aux dérivées partielles. On obtient aisément en choisissant dans (1.11) une fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{au sens des distributions sur } \Omega. \quad (1.12)$$

Prenons maintenant une fonction test $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Nous obtenons, compte tenu de (1.12) :

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v ds = 0.$$

1.4 Le problème de l'élastostatique

On considère un corps élastique dont la configuration de référence est un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière Γ . Le domaine Ω désigne une configuration de référence de ce corps. On suppose que ce corps est fixé sur tout son bord et qu'il est soumis à une force \mathbf{f} par unité de volume (par exemple, son propre poids). Dans ce qui suit, on note, pour $1 \leq i, j \leq 3$, par σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, par u_i les composantes du vecteur déplacement et par $D_{ij}(\mathbf{u})$ les composantes du tenseur des déformations défini, pour un déplacement \mathbf{u} , par

$$D_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

L'équilibre statique de ce corps est régi par l'équation

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Le matériau étant supposé élastique, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{k=1}^3 D_{kk}(\mathbf{u}) \right) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{u}) \quad 1 \leq i \leq 3,$$

où $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé du matériau et où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Nous en déduisons ainsi le problème aux limites :

$$\begin{cases} \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ -2\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(\mathbf{u}) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} = f_i & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma, \quad 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

Afin de donner une formulation variationnelle de ce problème, nous pouvons écrire (formellement) pour une fonction $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^3 D_{kk}(\mathbf{u}) \right) v_i dx &= - \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dx, \\ \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(\mathbf{u}) v_i dx &= - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Notons qu'on a aussi grâce à la symétrie de la matrice $(D_{ij}(\mathbf{v}))$:

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ij}(\mathbf{u}) v_j dx = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx.$$

D'où

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(\mathbf{u}) v_i dx = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} D_{ij}(\mathbf{u}) D_{ij}(\mathbf{v}) dx.$$

Nous avons ainsi obtenu la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3, \\ 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} D_{ij}(\mathbf{u}) D_{ij}(\mathbf{v}) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} dx \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3. \end{cases} \quad (1.13)$$

Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme 1.4.1 (Inégalité de Korn) Il existe une constante C , dépendant seulement de Ω , telle que :

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (D_{ij}(\mathbf{v}))^2 dx \geq C \|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^3}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Nous pouvons alors en déduire aisément le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.1 *Le problème (1.13) admet une solution unique $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Lax–Milgram avec :

$$V = H_0^1(\Omega)^3,$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} D_{ij}(\mathbf{u}) D_{ij}(\mathbf{v}) \, dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx,$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

La forme B (resp. L) est clairement bilinéaire (resp. linéaire) et continue sur V . De plus, la forme B est coercive grâce à l'inégalité de Korn ci-dessus. \square

Introduction à la méthode des éléments finis

Nous allons d'abord exposer cette méthode d'approximation numérique des équations dérivées partielles à travers un problème unidimensionnel elliptique.

2.1 Un problème unidimensionnel

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(au')'(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ci-dessus, Ω désigne l'intervalle $]0, 1[$, a désigne une fonction de classe C^1 vérifiant

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad 0 < x < 1,$$

et f désigne une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. Rappelons que sa formulation variationnelle est donnée par :

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} au'v' dx = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2)$$

2.1.1 Le problème approché

Pour approcher la solution du problème (2.2), on cherche une solution dans un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$. Pour cela, nous allons considérer un premier exemple. Nous subdivisons l'intervalle $[0, 1]$ en I intervalles de la manière suivante :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{I-1} < x_I = 1.$$

On note par $h_i = x_i - x_{i-1}$ et $h = \max_{1 \leq i \leq I} h_i$. Les points x_i sont appelés *nœuds* de la subdivision. Définissons maintenant l'espace :

$$V_h := \{v \in C^0(\overline{\Omega}); v|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq i \leq I-1, v(0) = v(1) = 0\},$$

où \mathbb{P}_k est l'espace des polynômes de degré $\leq k$. Notons qu'on a l'inclusion $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. On définit le problème variationnel approché de la manière suivante :

$$u_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} a u_h' v' dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V_h. \quad (2.3)$$

Théorème 2.1.1 *Le problème (2.3) admet une solution unique $u_h \in V_h$.*

Démonstration. L'espace V_h est un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$; c'est donc un sous-espace fermé. On en déduit que c'est un espace de Hilbert. Le théorème de Lax–Milgram permet de conclure. \square

2.1.2 Formulation matricielle du problème approché

Il est clair que le problème (2.3) conduit à la résolution d'un système linéaire. En effet, l'espace V_h étant de dimension $I - 1$, soit $(\phi_1, \dots, \phi_{I-1})$ une base quelconque de cet espace; on peut écrire $u_h \in V_h$ sous la forme :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{I-1} u_j \phi_j(x) \quad x \in [0, 1].$$

Ainsi, l'équation variationnelle (2.3) s'écrit

$$\sum_{j=1}^{I-1} \left(\int_{\Omega} a \phi_j' v' dx \right) u_j = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

Clairement, cette égalité est vraie pour tout $v \in V_h$ si et seulement si elle vraie pour tout ϕ_i , $i = 1, \dots, I - 1$. Ainsi

$$\sum_{j=1}^{I-1} \left(\int_{\Omega} a \phi_j' \phi_i' dx \right) u_j = \int_{\Omega} f \phi_i dx \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, I - 1\}.$$

Nous avons ainsi obtenu le système linéaire :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

où

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega} a \phi_i' \phi_j' dx & 1 \leq i, j \leq I - 1, \\ b_i &= \int_{\Omega} f \phi_i dx & 1 \leq i \leq I - 1. \end{aligned}$$

Afin de calculer effectivement les coefficients de la matrice et du second membre, nous choisissons la base canonique dite de *Lagrange*, *i.e.*, telle que :

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Nous obtenons ainsi

$$u(x_i) = \sum_{j=1}^{I-1} \phi_j(x_i) u_j = u_i.$$

On en déduit que les composantes du vecteur \mathbf{u} sont les valeurs prises par la solution approchée aux nœuds. On peut montrer que les fonctions ϕ_i sont données par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

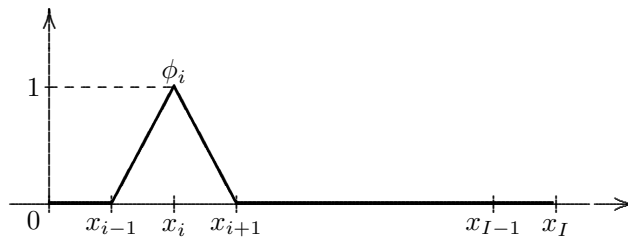


FIGURE 2.1. Fonctions de base

On appelle les fonctions ϕ_i , *fonctions chapeaux*. Par exemple, dans le cas où on choisit $a = 1$ et un maillage uniforme ($h_i = h$), on obtient après calcul :

$$\mathbf{A} := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ \ddots & \ddots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \int_{\Omega} f \phi_1 dx \\ \int_{\Omega} f \phi_2 dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f \phi_{I-1} dx \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.1 On se place dans les conditions suivantes : On suppose que l'on veuille calculer une approximation du second membre de ce système en utilisant la formule de trapèzes, i.e.

$$\int_{\Omega} f \phi_i dx \approx \frac{h_i + h_{i+1}}{2} f(x_i).$$

Dans ce cas, si l'on suppose, en outre que la subdivision est uniforme ($h_i = h, 1 \leq i \leq I$), on obtient le même système linéaire que celui obtenu lors de la discrétisation par la méthode des différences finies.

2.1.3 Convergence de la méthode

Nous allons, tout d'abord, établir une majoration abstraite de l'erreur. En effet, notons

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \alpha u' v' dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

En choisissant $v \in V_h$ dans (2.2) et en soustrayant (2.3) à (2.2), nous obtenons

$$B(u - u_h, v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in V_h. \quad (2.4)$$

Comme $B(\cdot, \cdot)$ est, dans cet exemple, le produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$, l'égalité (2.4) signifie que u_h est la projection de u sur V_h au sens du produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$. En outre, elle implique :

$$B(u - u_h, u - u_h) = B(u - u_h, u - v) \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

On obtient

$$\alpha |u - u_h|_{H^1(\Omega)}^2 \leq M |u - u_h|_{H^1(\Omega)} |u - v|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} |u - v|_{H^1(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in V_h;$$

ou encore

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} |u - v|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.5)$$

Cette inégalité signifie, dans le cas particulier où $M = \alpha$, que u_h est l'élément de V_h le plus proche de u au sens de la norme de $H_0^1(\Omega)$. Ceci n'est en fait qu'une conséquence du fait que u_h est la projection orthogonale de u sur V_h . De plus, cette majoration est dite abstraite parce qu'elle utilise uniquement le fait que V_h est un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$ et ne dépend donc pas du choix particulier de V_h .

Nous voulons maintenant obtenir une majoration de l'erreur plus précise. Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre de l'espace V_h choisi à partir des polynômes P_1 .

Définition 2.1.1 Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. On définit la V_h -interpolée de v comme étant la fonction \tilde{v}_h de V_h vérifiant

$$\tilde{v}_h(x_i) = v(x_i) \quad 1 \leq i \leq I - 1.$$

Cette définition a bien un sens puisque l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$ est continue. Ainsi, on a grâce à l'inégalité (2.5)

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq |u - \tilde{u}_h|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.6)$$

Nous avons donc ramené le problème d'approximation par la méthode des éléments finis à un problème d'interpolation. Avant de donner un résultat général d'approximation dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, nous allons montrer une formule de Taylor dans un cadre particulier.

Lemme 2.1.1 Soit $v \in H^2(\Omega)$ et soit $a, b \in \overline{\Omega}$. On a l'identité :

$$v(b) = v(a) + (b - a)v'(a) + \int_a^b (b - s)v''(s) ds. \quad (2.7)$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $H^2(\Omega)$ (Cf. BRÉZIS [1]) et la formule de Taylor avec reste intégral. \square

Lemme 2.1.2 Soit $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et soit $\tilde{v}_h \in V_h$ la V_h -interpolée de v . On a l'estimation :

$$|v - \tilde{v}_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{h}{\sqrt{3}} \|v\|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.8)$$

Démonstration. Notons d'abord que si $v \in H^2(\Omega)$, on a $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. De plus

$$|v - \tilde{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((v - \tilde{v}_h)')^2 dx.$$

Mais

$$v'(x) - \tilde{v}_h'(x) = v'(x) - \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h_{i+1}} \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

En utilisant la formule de Taylor (2.7), on peut écrire :

$$\begin{aligned} v(x_{i+1}) &= v(x) + (x_{i+1} - x)v'(x) + \int_x^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)v''(s) ds, \\ v(x_i) &= v(x) + (x_i - x)v'(x) - \int_{x_i}^x (x_i - s)v''(s) ds. \end{aligned}$$

Donc, pour $x \in (x_i, x_{i+1})$:

$$(v - \tilde{v}_h)'(x) = -\frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^x (x_i - s)v''(s) ds - \frac{1}{h_{i+1}} \int_x^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)v''(s) ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} ((v - \tilde{v}_h)'(x))^2 &\leq \frac{2}{h_{i+1}^2} \left(\int_{x_i}^x (x_i - s)v''(s) ds \right)^2 + \frac{2}{h_{i+1}^2} \left(\int_x^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)v''(s) ds \right)^2 \\ &\leq \frac{2}{h_{i+1}^2} \left(\int_{x_i}^x (x_i - s)^2 ds \right) \left(\int_{x_i}^x (v''(s))^2 ds \right) \\ &\quad + \frac{2}{h_{i+1}^2} \left(\int_x^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)^2 ds \right) \left(\int_x^{x_{i+1}} (v''(s))^2 ds \right) \\ &= \frac{2}{h_{i+1}^2} \left(\frac{(x_{i+1} - x)^3}{3} + \frac{(x - x_i)^3}{3} \right) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 ds. \end{aligned}$$

En intégrant sur (x_i, x_{i+1}) on obtient :

$$|v - \tilde{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{h^2}{3} \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 ds.$$

D'où le résultat. \square

Théorème 2.1.2 Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème (2.2) et soit $u_h \in V_h$ la solution du problème (2.3). On suppose, de plus, que $u \in H^2(\Omega)$. Alors, il existe une constante C , indépendante de h , telle que

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'estimation (2.6) et le lemme 2.1.2. En effet, on a :

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 |u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 h \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad \square$$

Remarque 2.1.1 L'estimation d'erreur (2.9) est assez précise. Dans le cas, plus général, d'une forme bilinéaire continue et coercive quelconque le facteur $1/\sqrt{3}$ est remplacé par une constante C indépendante de h mais faisant intervenir les constantes de continuité et de coercivité de a .

Remarque 2.1.2 On a construit l'espace V_h à partir de polynômes de degré 1. Il est possible de remplacer ceux-ci par des polynômes de degré p . On peut alors montrer la majoration d'erreur :

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^p \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad (2.10)$$

si $u \in H^{p+1}(\Omega)$.

Remarque 2.1.3 On s'est intéressé ici seulement à la « version h » de la méthode des éléments finis. Autrement dit, l'inégalité (2.10) signifie que l'erreur peut être rendue arbitrairement petite en fixant le degré du polynôme d'approximation (Attention : la constante C dépend de p) et en rendant h de plus en plus petit. La « version p » de la méthode des éléments finis — que nous n'aborderons pas ici — consiste à fixer h et à augmenter le degré du polynôme d'approximation.

2.2 Méthode d'éléments finis en dimension deux

Nous allons étendre la méthode décrite dans le paragraphe précédent au cas bidimensionnel. Pour cela, nous allons considérer un problème modèle dans \mathbb{R}^2 .

Soit Ω un polygone convexe de \mathbb{R}^2 de frontière Γ . La discrétisation du domaine Ω consistera en son découpage en triangles (on parlera de *triangulation* ou *maillage* du domaine Ω). La figure ci-dessous donne un exemple de triangulation :

On suppose que cette triangulation est telle que l'intersection de deux triangles est ou vide ou est une arête commune aux deux triangles.

On note par h la longueur d'arête maximale des triangles et par \mathcal{T}_h l'ensemble des triangles, *i.e.*

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

On va maintenant construire un sous-espace de dimension finie de l'espace $H_0^1(\Omega)$. Pour cela, soit

$$\{S_1, S_2, \dots, S_M\}$$

l'ensemble des sommets de tous les triangles

$$\{K_1, K_2, \dots, K_N\}.$$

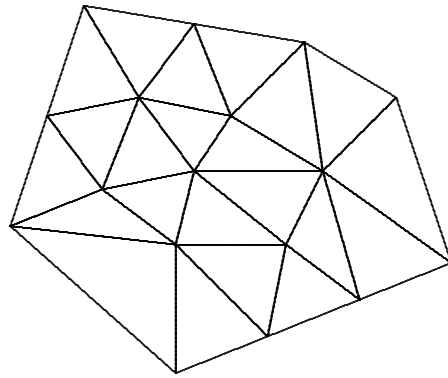


FIGURE 2.2. Une triangulation du domaine Ω .

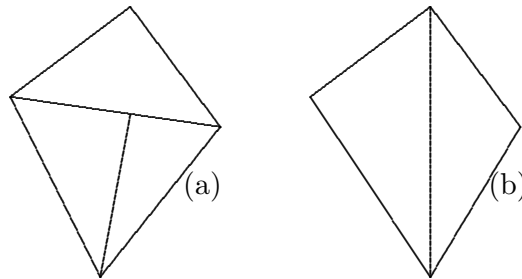


FIGURE 2.3. a) : situation interdite, (b) : situation autorisée

Lemme 2.2.1 Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$, M nombres réels. Il existe une unique fonction $v \in C^0(\overline{\Omega})$ telle que :

$$\begin{cases} v(S_i) = \alpha_i & 1 \leq i \leq M, \\ v|_K \in P_1, \end{cases}$$

où P_1 est l'espace des polynômes de degré 1, i.e. de la forme $a + bx_1 + cx_2$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas d'un seul triangle K de sommets S_1, S_2, S_3 . Il est facile de voir que si ce triangle ne dégénère pas en un segment alors pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme p de P_1 tel que

$$p(S_i) = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Il suffit de montrer alors le lemme pour un couple de triangles adjacents. Soient K_1, K_2 deux triangles partageant une arête de sommets S_1, S_2 . Il est clair que si v est une fonction vérifiant $v|_{K_1} \in P_1$ et $v|_{K_2} \in P_1$ et prenant des valeurs $v(S_1) = v_1$ et $v(S_2) = v_2$ alors $v \in C^0(K_1 \cup K_2)$. \square

On pose alors

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_K \in P_1 \forall K \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Lemme 2.2.2 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière Γ assez régulière tel que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i$$

où

1. Ω_i est un ouvert borné de \mathbb{R}^N contenu dans Ω de frontière Γ_i assez régulière, pour $1 \leq i \leq N$;
2. $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Soit $v \in C^0(\bar{\Omega})$ une fonction telle que $v|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Alors $v \in H^1(\Omega)$.

Démonstration. Pour $k \in \{1, \dots, N\}$, on définit $v_k \in L^2(\Omega)$ par

$$v_k|_{\Omega_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v|_{\Omega_i}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Montrons que $v_k = \frac{\partial v}{\partial x_k}$ au sens des distributions sur Ω . On a pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle v_k, \phi \rangle = \int_{\Omega} v_k \phi \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (v|_{\Omega_i}) \phi \, dx.$$

En utilisant la formule de Green dans chaque Ω_i on obtient :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (v|_{\Omega_i}) \phi \, dx = - \int_{\Omega_i} v \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \, dx + \int_{\Gamma_i} \phi v|_{\Omega_i} n_k \, ds.$$

Or la continuité de v et le fait que $\phi = 0$ sur Γ impliquent :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \phi v|_{\Omega_i} n_k \, ds = 0.$$

On en déduit, pour $1 \leq k \leq N$,

$$\langle v_k, \phi \rangle = - \langle v, \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \rangle = \langle \frac{\partial v}{\partial x_k}, \phi \rangle \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

D'où $v \in H^1(\Omega)$. \square

On obtient alors le résultat immédiat suivant.

Corollaire 2.2.1 On a $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

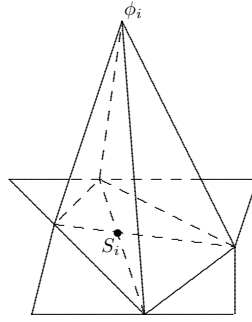


FIGURE 2.4. Une fonction de base de l'espace V_h .

On va maintenant expliciter une base de V_h appelée *base de Lagrange*. A chaque nœud intérieur S_i on associe la fonction $\phi_i \in V_h$ définie par :

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq M.$$

Nous voulons maintenant approcher le problème variationnel :

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.11)$$

où

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (2.12)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.13)$$

On définit le problème approché par

$$u_h \in V_h, \quad B(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (2.14)$$

On a le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 *Le problème (2.14) admet une solution unique $u_h \in V_h$. De plus, on a l'estimation*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V_h} |u - v|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.15)$$

Démonstration. L'espace V_h est un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$; il est donc fermé. On en déduit que c'est un espace de Hilbert. On munit cet espace de la norme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ induite par celle de $H_0^1(\Omega)$. On peut alors appliquer le théorème de Lax–Milgram pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution.

L'estimation (2.15) est la même que dans le cas unidimensionnel. Notons que la constante C est égale à M/α où M et α désignent respectivement les constantes de continuité et de coercivité de la forme a . \square

2.2.1 Formulation matricielle de la méthode

Comme pour le cas unidimensionnel, nous allons écrire le problème (2.14) sous la forme d'un système linéaire. Pour cela, on utilise la base des fonctions $(\phi_i)_{i=1,\dots,N}$ décrite ci-dessus et on obtient naturellement :

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

où

$$\begin{aligned} a_{ij} &= B(\phi_i, \phi_j) & 1 \leq i, j \leq N, \\ b_j &= L(\phi_j) & 1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Ici encore, le vecteur \mathbf{u} contient la solution approchée aux nœuds S_i .

Afin d'illustrer la structure de la matrice de rigidité A , nous prenons l'exemple de la triangulation suivante :

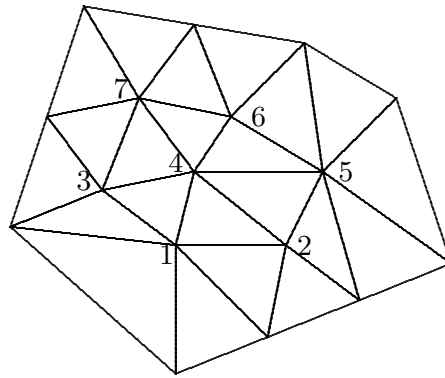


FIGURE 2.5. Un exemple de numérotation des nœuds.

Ceci donne une matrice ayant la forme suivante (où on a noté avec une étoile les termes non nuls) :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Clairement, la matrice A est une matrice bande, *i.e.*, les coefficients sont nuls en dehors d'une bande. Cette propriété est due au support « local » des fonctions de base. De plus, il est clair que la largeur de la bande dépend de la numérotation choisie des nœuds.

2.2.2 Formation du système linéaire par assemblage

Nous nous intéressons maintenant à la formation effective de la matrice et du second membre sur ordinateur. Il est clair que, du point de vue de la mise en oeuvre informatique, le calcul des coefficients de la matrice et du second membre :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} dx, \quad b_i = \int_{\Omega} f \phi_i dx$$

n'est pas facile. En effet, le support de chaque fonction ϕ_i est l'ensemble des triangles ayant le nœud S_i pour sommet, et on doit donc pour chaque nœud rechercher les triangles ayant ce nœud pour sommet. On peut aussi écrire :

$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \phi_i dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \phi_i^K dx.$$

où ϕ_i^K est la restriction de la fonction de base ϕ_i au triangle K . De même, on écrira

$$a_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{k=1}^2 \int_K \frac{\partial \phi_i^K}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j^K}{\partial x_k} dx \right).$$

On dit alors que la matrice et le second membre sont calculés par *assemblage de la matrice et du second membre élémentaires*. On appelle $\mathbf{A}_K = (a_{ij}^K)$, $\mathbf{b}_K = (b_i^K)$, où

$$a_{ij}^K = \sum_{k=1}^2 \int_K \frac{\partial \phi_i^K}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j^K}{\partial x_k} dx,$$

$$b_i^K = \int_K f \phi_i^K dx,$$

matrice et second membre élémentaires. Notons qu'en fait le second membre élémentaire n'a que trois composantes non nulles et que ceci peut être pris en compte lors de l'implémentation. La même remarque peut être faite pour la matrice élémentaire.

Cette méthode pour calculer les coefficients de la matrice et du second membre permet clairement de calculer localement les « tableaux élémentaires » (a_{ij}^K) et (b_i^K). Ainsi, si on numérote localement les nœuds (sommets) d'un triangle K_n et si on note par N_i^n , $1 \leq i \leq 3$, le numéro du i -ème nœud local du triangle K_n , le calcul des coefficients de la matrice et du second membre peut se programmer en utilisant l'algorithme suivant.

```

A ≡ 0, b ≡ 0,
Pour  $n = 1, \dots, M$ 
  calcul de  $(a_{ij}^{K_n})_{1 \leq i, j \leq 3}$ 
  calcul de  $(b_i^{K_n})_{1 \leq i \leq 3}$ 
  pour  $i = 1, \dots, 3$ 
     $b_{N_i^n} := b_{N_i^n} + b_i^{K_n}$ 
    pour  $j = 1, \dots, 3$ 
       $a_{N_i^n, N_j^n} := a_{N_i^n, N_j^n} + a_{i, j}^{K_n}$ 
    fin  $j$ 
  fin  $i$ 
fin  $n$ .

```

Remarque 2.2.1 L'étape de calcul des tableaux élémentaires dépend du type du problème à résoudre (coefficients physiques) et du choix de l'élément fini (ici, triangle \mathbb{P}_1), alors que l'assemblage est une étape commune à tous les problèmes. Cela permet de construire des programmes d'éléments finis assez modulaires.

Remarque 2.2.2 On peut montrer que la matrice A est symétrique définie positive. Cela permet de choisir des méthodes bien adaptées pour la résolution du système linéaire.

Remarque 2.2.3 Il est clair que lors de l'assemblage nous n'avons pas tenu compte de la structure particulière de la matrice (matrice creuse). En effet, cette propriété peut être avantageusement prise en compte afin d'économiser la mémoire et le temps de calcul sur ordinateur.

2.2.3 Calcul de la matrice et du second membre élémentaires

On définit le triangle \widehat{K} de sommets $\widehat{S}_1 = (0, 0)$, $\widehat{S}_2 = (1, 0)$, $\widehat{S}_3 = (0, 1)$, appelé *triangle de référence* :

Soit K un triangle quelconque de sommets $S_i = (x_1^i, x_2^i)$ et soit l'application affine :

$$F_K : \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix} \in \widehat{K} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1^1 & x_1^3 - x_1^1 \\ x_2^2 - x_2^1 & x_2^3 - x_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors montrer que $F_K(\widehat{K}) \subset K$ et même $F_K(\widehat{K}) = K$.

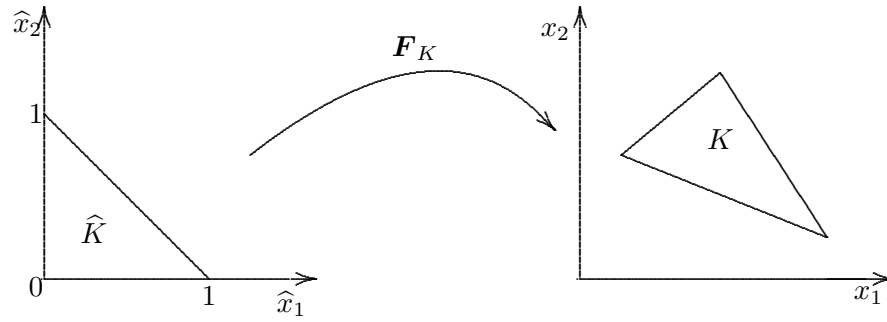
Soit $v(x)$ une fonction définie sur K ; on lui associe la fonction

$$\widehat{v}(\widehat{x}) = v(F_K(\widehat{x})).$$

On a en particulier $\widehat{v}(\widehat{S}_i) = v(S_i)$, $1 \leq i \leq 3$. On en déduit que si p est le polynôme de \mathbb{P}_1 égal à α_i aux sommets S_i alors le polynôme $\widehat{p}(\widehat{x}) = p(F_K(\widehat{x}))$ vérifie

$$\widehat{p}(\widehat{x}) = (1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2)\alpha_1 + \widehat{x}_1\alpha_2 + \widehat{x}_2\alpha_3;$$

et en particulier $\widehat{p}(\widehat{S}_i) = \alpha_i$. On peut alors calculer les matrices et seconds membres élémentaires en utilisant la transformation F_K (cf. exercices).


 FIGURE 2.6. Transformation : Élément de référence \rightarrow élément courant.

2.2.4 Convergence de la méthode

A l'aide de l'estimation (2.15) on va établir la convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . Supposons que la solution du problème (2.11) soit dans $H^2(\Omega)$. On sait par ailleurs qu'on a l'injection continue de $H^2(\Omega)$ dans $C^0(\Omega)$. On peut donc définir la fonction $\tilde{u}_h \in V_h$, appelée V_h -interpolée de u par :

$$\tilde{u}_h \in V_h, \tilde{u}_h(S_i) = u(S_i), \quad 1 \leq i \leq M.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\tilde{u}_h(x) = \sum_{i=1}^M \phi_i(x) \tilde{u}_h(S_i) = \sum_{i=1}^M \phi_i(x) u(S_i).$$

D'où, en utilisant l'inégalité (2.15) :

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C |u - \tilde{u}_h|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.16)$$

Nous avons donc ramené le problème de l'approximation par la méthode des éléments finis à un problème d'interpolation d'une fonction de $H_0^1(\Omega)$.

Soit K un triangle dans \mathbb{R}^2 et soit

$$\begin{aligned} h_K &= \text{diamètre du cercle circonscrit à } K, \\ \rho_K &= \text{diamètre du cercle inscrit dans } K. \end{aligned}$$

On appelle aussi parfois h_K et ρ_K respectivement, le diamètre de K et la rondeur de K . On note enfin par h le nombre

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

Dans ce qui suit on suppose qu'il existe un réel $\beta > 0$ indépendant de h tel que :

$$\frac{\rho_K}{h_K} \geq \beta \quad \text{pour tout } K \in \mathcal{T}_h. \quad (2.17)$$

Théorème 2.2.2 Soit $v \in H^2(\Omega)$. Alors, sous l'hypothèse (2.17), il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$|v - \tilde{v}_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|v|_{H^2(\Omega)}.$$

On a ainsi la majoration d'erreur :

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}.$$

2.3 Quelques exemples d'éléments finis

Donnons une définition précise d'un élément fini.

Définition 2.3.1 On appelle élément fini la donnée d'un triplet (K, Σ, P) où :

1. K est une forme géométrique (Exemple : un triangle);
2. Σ est un ensemble de "degrés de liberté" (Exemple : valeurs de l'inconnue aux sommets du triangle);
3. P est un espace de polynômes,

tel que Σ soit P -unisolvant, i.e., il existe une fonction unique de P prenant des valeurs données aux degrés de liberté de Σ .

Souvent, on appelle, par abus de langage, K l'élément fini.

Exemple 2.3.1 On prend pour K le triangle, pour Σ l'ensemble des valeurs des inconnues aux sommets de K et pour P l'espace \mathbb{P}_1 . On peut alors montrer que Σ est \mathbb{P}_1 -unisolvant.

Exemple 2.3.2 On prend pour K le rectangle aux côtés parallèles aux axes, pour Σ l'ensemble des valeurs des inconnues aux sommets de K et pour P l'espace \mathbb{Q}_1 , i.e., les polynômes de la forme

$$p(x) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2.$$

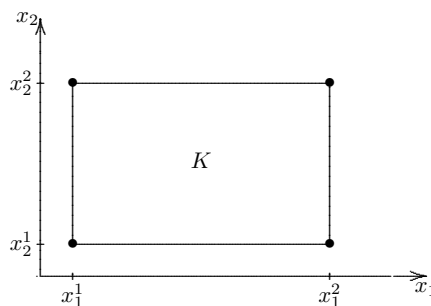


FIGURE 2.7. L'élément fini rectangle \mathbb{Q}_1 .

Montrons que Σ est \mathbb{Q}_1 -unisolvant.

Soit $p \in \mathbb{Q}_1$ avec $p = 0$ aux quatre sommets de K . On a $p(x_1^1, x_2^1) = p(x_1^2, x_2^2) = 0$. Donc $p(x_1^1, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in [x_2^1, x_2^2]$. De même, on trouve $p(x_1^2, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in [x_2^1, x_2^2]$. D'où $p \equiv 0$.

Exemple 2.3.3 On prend pour K le triangle, pour Σ l'ensemble des valeurs des inconnues aux sommets et aux milieux des côtés et pour P l'espace des polynômes \mathbb{P}_2 , i.e., les polynômes de la forme

$$p(x) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 + e(x_1)^2 + f(x_2)^2.$$

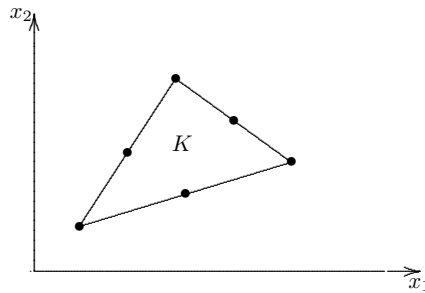


FIGURE 2.8. L'élément fini \mathbb{P}_2 .

On peut alors montrer aisément que Σ est \mathbb{P}_2 -unisolvant.

Exemple 2.3.4 Soit \widehat{K} la carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. On note par $\widehat{A}_i, i = 1, \dots, 4$ les sommets de \widehat{K} et soit K un quadrilatère convexe de sommets $A_i, i = 1, \dots, 4$.

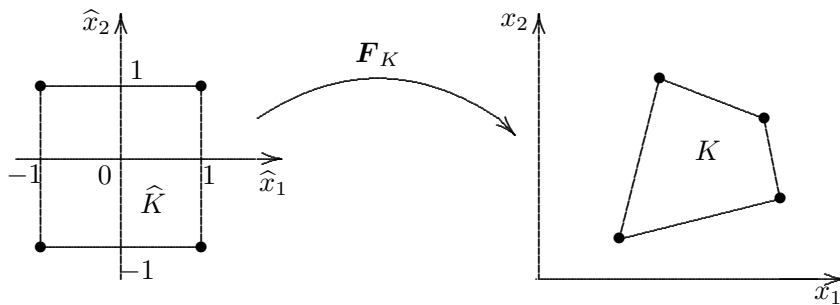


FIGURE 2.9. L'élément fini quadrilatéral \mathbb{Q}_1 .

Soit p_1, p_2, p_3, p_4 quatre nombre réels quelconques. A l'aide de l'exemple 2.3.2, on montre qu'il existe un unique \widehat{p} de $\widehat{\mathbb{Q}}_1$ (i.e., de la forme $a + b\xi + c\eta + d\xi\eta$) tel que :

$$\widehat{p}(\widehat{A}_i) = p_i \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Ce polynôme est donné par

$$\widehat{p}(\widehat{x}) = \frac{1}{4}(1 - \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_2)p_1 + \frac{1}{4}(1 + \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_2)p_2 + \frac{1}{4}(1 + \widehat{x}_1)(1 + \widehat{x}_2)p_3 + \frac{1}{4}(1 - \widehat{x}_1)(1 + \widehat{x}_2)p_4.$$

Notons

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_1(\widehat{x}) &= \frac{1}{4}(1 - \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_2), \\ \widehat{\phi}_2(\widehat{x}) &= \frac{1}{4}(1 + \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_2), \\ \widehat{\phi}_3(\widehat{x}) &= \frac{1}{4}(1 + \widehat{x}_1)(1 + \widehat{x}_2), \\ \widehat{\phi}_4(\widehat{x}) &= \frac{1}{4}(1 - \widehat{x}_1)(1 + \widehat{x}_2). \end{aligned}$$

Les polynômes $\widehat{\phi}_i$, $1 \leq i \leq 4$ sont dans l'espace \widehat{Q}_1 . De plus, il est clair qu'ils forment une base de l'espace de polynômes \widehat{Q}_1 sur \widehat{K} . Soit

$$F_K : \widehat{x} \in \widehat{K} \mapsto x = \sum_{i=1}^4 \widehat{\phi}_i(\widehat{x})A_i.$$

On a alors

$$\begin{aligned} F_K(\widehat{A}_i) &= A_i, & 1 \leq i \leq 4, \\ F_K(\widehat{A}_i\widehat{A}_{i+1}) &= A_iA_{i+1}, & 1 \leq i \leq 4 \text{ avec } A_5 = A_1, \widehat{A}_5 = \widehat{A}_1, \\ F_K(\widehat{K}) &= K. \end{aligned}$$

On peut donc considérer des sous-espaces de dimension finie de $H^1(\Omega)$ de la forme :

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}); v|_K \in Q_1(K) \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\},$$

où

$$Q_1(K) := \{p; p = \widehat{p} \circ F_K^{-1}, \widehat{p} \in \widehat{Q}_1\}.$$

Notons que, comme l'application F_K n'est pas affine, les fonctions de $Q_1(K)$ ne sont pas nécessairement polynomiales.

Remarque 2.3.1 Dans le cas de l'exemple 2.3.4, la description de la géométrie de l'élément fini i.e., la donnée de F_K se fait à l'aide des quatre fonctions $\widehat{\phi}_i$, $1 \leq i \leq 4$. Il en est de même pour l'approximation (construction de V_h). On dit alors que l'élément fini est iso-paramétrique. Dans l'exemple 2.3.3, la fonction F_K est décrite seulement à l'aide des fonctions $\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3$ associées aux sommets du triangle.

2.4 Méthode des éléments finis et intégration numérique

Jusqu'ici nous avons supposé que le calcul des intégrales intervenant dans la méthode des éléments finis peut faire exactement. Ceci n'est pas toujours possible. En effet, si nous considérons des problèmes elliptiques avec coefficients variables, on ne sait pas toujours calculer la matrice de rigidité. Il en est de même du second membre. De plus, si on considère le cas des éléments finis quadrilatéraux iso-paramétriques, même avec des coefficients constants, l'intégrand n'est pas une fonction polynomiale.

Examinons le cas, plus simple, où seul le second membre est calculé à l'aide d'une formule d'intégration numérique, *i.e.*,

$$L(v) \approx L_h(v) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{k=1}^p \omega_k f(x_k) v(x_k) \quad v \in V_h,$$

où p est le nombre de points d'intégration numérique sur un élément et où $(\omega_k)_k, x_k$ sont respectivement les poids dans la formule d'intégration numérique et les coordonnées des points d'intégration dans l'élément.

Le problème approché s'écrit alors

$$\tilde{u}_h \in V_h, \quad B(\tilde{u}_h, v) = L_h(v) \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

On a alors pour $v \in V_h$:

$$B(u - \tilde{u}_h, v) = L(v) - L_h(v).$$

Notons par u_h la solution approchée obtenue sans intégration numérique, *i.e.*, la solution du problème :

$$u_h \in V_h, \quad B(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h.$$

On a donc

$$B(u_h - \tilde{u}_h, v) = L(v) - L_h(v) \quad \forall v \in V_h.$$

Choisissons $v = u_h - \tilde{u}_h \in V_h$. On obtient :

$$B(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) = L(u_h - \tilde{u}_h) - L_h(u_h - \tilde{u}_h).$$

Donc

$$\alpha |u_h - \tilde{u}_h|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |L(u_h - \tilde{u}_h) - L_h(u_h - \tilde{u}_h)|.$$

Comme $L - L_h$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |(L - L_h)(u_h - \tilde{u}_h)| &\leq \|L - L_h\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})} |u_h - \tilde{u}_h|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq |u_h - \tilde{u}_h|_{H^1(\Omega)} \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|(L - L_h)v|}{|v|_{H^1(\Omega)}}. \end{aligned}$$

D'où la majoration d'erreur :

$$|u_h - \tilde{u}_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|L(v) - L_h(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}}.$$

Soit

$$|u - \tilde{u}_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} |u - v|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|L(v) - L_h(v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}}.$$

On en déduit qu'il est possible d'utiliser une formule d'intégration numérique pour calculer le second membre pourvu que cette formule soit du même ordre que l'erreur d'interpolation. Une majoration d'erreur abstraite analogue mais plus compliquée est obtenue lorsqu'on considère l'approximation des coefficients de la matrice par intégration numérique.

Références

1. H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris (1984).
2. P.G. CIARLET, *Analyse numérique matricielle et optimisation*, Masson, Paris (1982).
3. B. LUCQUIN, O. PIRONNEAU, *Introduction au Calcul scientifique*, Masson, Paris (1997).
4. P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, *Introduction À l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles* Masson, Paris (1983).
5. L. SAINSAULIEU, *Introduction au Calcul scientifique*, Masson, Paris (1997).