POLYTECH
CLERMONT-FERRAND

Génie Mathématique et Modélisation
3ème Année

Introduction à l'intégrale de Lebesgue

Rachid Touzani

Septembre 2020

Préface

Ces notes constituent l'essentiel du cours dispensé au département *Génie Mathématique et Modélisation* de l'Iécole Polytech Clermont-Ferrand en troisième année. Il s'agit d'une présentation simple de la théorie de l'intégrale de Lebesgue évitant, dans la mesure du possible, les notions difficiles de la théorie de la mesure.

R. TOUZANI
Professeur

Table des matières

1

Préliminaires et rappels

1.1 Qu'est-ce qu'un intégrale ?

Rappelons la première définition d'une intégrale. Considérons une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ de la droite réelle. Par définition, l'intégrale de f est l'aire délimitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox, et les droites $x = a$ et $x = b$. Il convient alors de donner une définition *plus mathématique* et *moins restrictive* de cette notion. Cette définition a été donnée par B. RIEMANN en 1853.
Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. On considère une *subdivision* de l'intervalle $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On définit $h = \sup_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$ et

$$\mathscr{R} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad c_i \in]x_{i-1}, x_i[.$$

On appellera *Intégrale de f sur* $[a,b]$, la limite de $\mathscr{R}$, lorsque celle-ci existe, quand $n \to \infty$ (ou $h \to 0$). Il est alors facile de vérifier que cette définition coïncide avec celle de l'aire lorsque la fonction f est continue et que cette définition est encore valable pour des fonctions ayant un nombre fini de discontinuités. Cette définition contient toutefois encore un certain nombre de restrictions. En particulier, une suite de Cauchy pour la norme

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$$

de fonctions continues peut converger vers une fonction non intégrable. Pour pallier ces inconvénients Henri LEBESGUE a proposé une nouvelle définition de l'intégrale que l'on peut présenter intuitivement de la manière suivante : On regroupe les valeurs de f dans un intervalle $[m,M]$, on subdivise cet intervalle en sous-intervalles $]y_{i-1}, y_i[$ puis on construit l'ensemble

$$\{x \in [a,b];\ y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}.$$

On associe une *mesure* m_i à cet ensemble. On considère alors les sommes

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \eta_i \qquad \text{où} \quad y_{i-1} \leq \eta_i < y_i.$$

On définit enfin l'intégrale de f comme étant la limite de ces sommes lorsque la taille des sous-intervalles tend vers zéro.
Nous verrons, dans ce cours, que cette nouvelle notion d'intégrale permet d'énoncer des théorèmes de convergence comme celui-ci :
Si (f_n) *est une suite de fonctions définies sur un intervalle* $[a, b]$ *telle que*

$$|f_n(x)| \leq M \qquad \forall\, n,\ \forall\, x \in [a, b].$$

et si $f_n(x)$ *converge vers* $f(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *alors la suite* $\int_a^b f_n(x)\, dx$ *converge vers* $\int_a^b f(x)\, dx$.
Enfin, il est clair que toute théorie de l'intégration doit contenir une notion de mesure des parties de $\mathbb{R}$; celle-ci devant vérifier en particulier les propriétés suivantes :
— La mesure de tout intervalle est sa longueur ;
— si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles disjoints de $\mathbb{R}$ alors la mesure de l'ensemble $\cup_{i=1}^{n} A_i$ est la somme des mesures des ensembles A_i ;
— la mesure d'un ensemble est positive, éventuellement infinie.

Cette mesure nous permettra de construire une théorie de l'intégration avec des théorèmes de convergence.

1.2 Quelques rappels

1.2.1 Ensembles dénombrables

On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il est en bijection avec l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, c'est-à-dire, si l'on peut énumérer ses éléments en une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec ($x_n \neq x_m$ lorsque $n \neq m$). Ainsi, par exemple, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, alors que l'ensemble $\mathbb{R}$ et l'ensemble des intervalles $[a, b]$, avec $a < b$, ne le sont pas.

Exemple 1.2.1 *L'ensemble des entiers relatifs* $\mathbb{Z}$ *est dénombrable. En effet, soit pour* $n \in \mathbb{N}$, $q(n)$ *le plus petit entier supérieur ou égal à* $n/2$, *et soit la suite* $x_n = (-1)^n q(n)$. *On voit aisément que les termes de* x_n *d'indice pair décrivent l'ensemble* $\mathbb{N}$ *alors que les termes d'indices impairs décrivent les entiers négatifs non nuls. Ainsi la suite* x_n *décrit une bijection entre* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$.

Proposition 1.2.1

1. *Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.*
2. *La réunion d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.*
3. *Si l'ensemble* E *n'est pas fini ou dénombrable, alors* $E \setminus F$, *n'est pas fini ou dénombrable pour tout* $F \subset E$ *fini ou dénombrable.*

1.2.2 Séries

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique et soit

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n$$

la *somme partielle* de cette suite à l'ordre n.

1. On dit que la série $\sum_n u_n$ est convergente si S_n converge vers une limite *finie* S, que l'on note $S = \sum_n u_n$ et que l'on appelle *somme de la série*.
2. Si la série $\sum_n u_n$ converge, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0. La réciproque est *fausse*.
3. La série $\sum_n u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum_n |u_n|$ converge.
4. Si on a $u_n \geq 0$ pour tout n, la suite S_n est croissante, donc elle tend toujours vers une limite (finie ou infinie). On écrit encore $S = \sum_n u_n$.
5. Si $u_n \in [0, +\infty]$ pour tout n, la somme $\sum_n u_n$ ne change pas si on change l'ordre de sommation.

Montrons cette dernière propriété : Soit p une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même et soient les sommes partielles

$$S_n = u_1 + \ldots u_n, \quad S'_n = u_{p(1)} + \ldots u_{p(n)}.$$

Les suites (S_n) et (S'_n) sont croissantes. Notons S et S' leurs limites respectives (finies ou infinies). Pour tout n il existe un entier $m(n)$ tel que $p(i) \leq m(n)$ pour $i \leq n$. Comme $u_i \geq 0$ on a $S'_n \leq S_{m(n)} \leq S$. Donc en passant à la limite, on obtient $S' \leq S$. On montre de la même manière que $S \leq S'$, et donc $S = S'$.

1.2.3 Limites supérieure et inférieure

On considère une suite (u_n) bornée de nombres réels. On définit les suites :

$$v_n = \sup\{u_k;\ k \geq n\}, \quad w_n = \inf\{u_k;\ k \geq n\}.$$

La suite (v_n) (*resp.* (w_n)) est décroissante (*resp.* croissante). On en déduit que ces deux suites convergent. On définit

$$\limsup_n u_n := \lim_{n\to\infty} v_n, \quad \liminf_n u_n := \lim_{n\to\infty} w_n.$$

Cette définition peut être étendue au cas où la suite (u_n) n'est pas bornée. Ainsi si (u_n) n'est pas majorée, on définit

$$\limsup_n u_n = +\infty,$$

et lorsque celle-ci n'est pas minorée, on définit

$$\liminf_n u_n = -\infty.$$

Prenons, à titre d'exemple, la suite numérique bornée $u_n = (-1)^n$. On a $v_n = 1$ et $w_n = -1$. On en déduit que $\limsup_n u_n = 1$ et $\liminf_n u_n = -1$.

1.2.4 Suites de fonctions

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ où pour tout $n \geq 1$, $f_n : E \to \mathbb{R}$.

Définition 1.2.1

1. *On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f si la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in E$.*
2. *On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge* uniformément *vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On montre aisément que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction f, alors elle converge simplement vers f. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple 1.2.2 *Considérons la suite de fonctions $f_n(x) = (1-x)\,e^{-nx}$ définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Cette suite converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ mais pas uniformément.*

Définition 1.2.2 *On appelle* limite supérieure *et* limite inférieure *d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions sur E et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ les fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned}\limsup_n f_n(x) &= \inf_n \sup_{m\geq n} f_m(x),\\ \liminf_n f_n(x) &= \sup_n \inf_{m\geq n} f_m(x).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Notons que les fonctions $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont *a priori* à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, même si les fonctions f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si la suite $(f_n)_n$ est croissante (*resp.* décroissante), elle converge simplement vers une limite f vérifiant $\limsup_n f_n = \lim_n f_n$ et aussi $f = \sup_n f_n$ (*resp.* $f = \inf_n f_n$).
Dans le cas général, dire que la suite (f_n) converge simplement est équivalent à dire que $\limsup_n f_n = \liminf_n f_n$. La valeur commune de ces deux fonctions est la limite de la suite f_n. On a en outre la propriété

$$\limsup_n f_n = -\liminf_n(-f_n).$$

1.2.5 Quelques conventions

Dans tout ce qui suit on définit les ensembles :

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} = [-\infty,+\infty], \quad \overline{\mathbb{R}}_+ := [0,+\infty].$$

De plus, on adoptera les conventions suivantes :

$$\begin{aligned}&+\infty+\infty = +\infty, \quad -\infty-\infty = -\infty,\\ &a+\infty = +\infty, \quad a-\infty = -\infty \qquad \forall\, a\in\mathbb{R},\\ &a\times+\infty = +\infty \qquad \text{si } a \in]0,+\infty],\\ &a\times+\infty = -\infty \qquad \text{si } a \in [-\infty,0[.\end{aligned}$$

2

Intégrale de Riemann

2.1 Introduction

Nous consacrons ce chapitre à l'intégration de fonctions bornées sur un intervalle fermé et borné de la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit S une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. *i.e.* une partie finie $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b.$$

Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée et pour toute subdivision $S = (s_i)_{0 \leq i \leq n}$, on définit les réels :

$$\mathscr{L}(f, S) = \sum_{1 \leq i \leq n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{s_{i-1} \leq x < s_i} f(x),$$

$$\mathscr{U}(f, S) = \sum_{1 \leq i \leq n} (s_i - s_{i-1}) \sup_{s_{i-1} \leq x < s_i} f(x).$$

On a évidemment $\mathscr{L}(f, S) \leq \mathscr{U}(f, S)$. De plus, si S et T sont deux subdivisions de $[a, b]$ avec $S \subset T$ (on dit alors que la subdivision T est plus fine que S) on a

$$\mathscr{L}(f, S) \leq \mathscr{L}(f, T), \quad \mathscr{U}(f, T) \leq \mathscr{U}(f, S).$$

Soient maintenant S et S' deux subdivisions quelconques et soit $T = S \cup S'$; on a

$$\mathscr{L}(f, S) \leq \mathscr{L}(f, T) \leq \mathscr{U}(f, T) \leq \mathscr{U}(f, S').$$

On en déduit que la quantité $\mathscr{L}(f, S)$ (*resp.* $\mathscr{U}(f, S)$) admet une borne supérieure (*resp.* inférieure) lorsque S décrit l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$ et on a

$$\sup_S \mathscr{L}(f, S) \leq \inf_S \mathscr{U}(f, S).$$

Définition 2.1.1 *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est* intégrable au sens de Riemann *ou* Riemann–intégrable *si f est bornée et si*

$$\sup_S \mathscr{L}(f, S) = \inf_S \mathscr{U}(f, S).$$

Cette valeur est alors appelée intégrale définie de la fonction f sur $[a,b]$ *et est notée*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans ce qui suit, si $S = (s_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, on appellera *pas de la subdivision* le nombre

$$h_S := \max_{1\leq i\leq n}(s_i - s_{i-1}).$$

Proposition 2.1.1 *Soit f une fonction réelle bornée sur un intervalle $[a,b]$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit Riemann–intégrable est que*

$$\lim_{h_S\to 0}(\mathscr{U}(f,S) - \mathscr{L}(f,S)) = 0.$$

Démonstration.
La condition est trivialement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc des subdivisions S' et S'' telles que

$$\mathscr{U}(f,S'') - \mathscr{L}(f,S') \leq \varepsilon.$$

Soit la subdivision $S = S' \cup S'' = (s_i)_{0\leq i\leq n}$, on a $\mathscr{U}(f,S) - \mathscr{L}(f,S) \leq \varepsilon$. Posons $M = \omega(f,[a,b])$ et $\theta = \varepsilon/nM$ et soit h_S le pas de la subdivision S et $\theta' = \min(h_S,\theta) > 0. \ldots$ $\square$

2.2 Fonctions Riemann-intégrables

Définition 2.2.1 *On appelle* fonction en escalier *toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $S = (s_i)_{0\leq i\leq n}$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $[s_{i-1}, s_i[$. On a alors*

$$\mathscr{U}(f,S) = \mathscr{L}(f,S) = \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})f(s_{i-1}).$$

Ainsi, une fonction en escalier est Riemann–intégrable et son intégrale vaut

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})f(s_{i-1}).$$

Proposition 2.2.1 *Toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.*

Proposition 2.2.2

1. *L'ensemble E des fonctions Riemann–intégrables sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions réelles sur $[a,b]$. De plus, l'application*

$$I : f \in E \mapsto I(f) := \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

est une forme linéaire sur E, i.e. *une application linéaire continue de E dans $\mathbb{R}$.*

2. *Si f et g sont deux fonctions Riemann–intégrables avec $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$.*
3. *Une limite uniforme sur $[a, b]$ de fonctions intégrables est une fonction intégrable.*

Démonstration.
1. Soient f et g deux fonctions bornées sur $[a, b]$. Si $A \subset [a, b]$, on a les inégalités :

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x) &\leq \inf_{x \in A} (f(x) + g(x)), \\ \sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) &\leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x). \end{aligned}$$

Soit S une subdivision de $[a, b]$, on a donc

$$\mathscr{L}(f, S) + \mathscr{L}(g, S) \leq \mathscr{L}(f + g, S) \leq \mathscr{U}(f + g, S) \leq \mathscr{U}(f, S) + \mathscr{U}(g, S).$$

On en déduit que si f et g sont intégrables alors $f + g$ l'est aussi et, de plus, $I(f + g) = I(f) + I(g)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on voit de la même façon que si f est intégrable alors λf l'est aussi et $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.
2. Si A est une partie de $[a, b]$, alors l'inégalité $f \leq g$ entraîne

$$\inf_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in A} g(x), \quad \sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in A} g(x).$$

Soit S une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On a donc $\mathscr{L}(f, S) \leq \mathscr{L}(g, S)$ et $\mathscr{U}(f, S) \leq \mathscr{U}(g, S)$. D'où, par passage aux bornes, $I(f) \leq I(g)$.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite (f_n) de fonctions intégrables sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [a, b]$, on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in A} f_n(x) - \inf_{x \in A} f_n(x) + 2\varepsilon$$

pour toute partie A de $[a, b]$. On a donc, pour toute subdivision S de $[a, b]$

$$\mathscr{U}(f, S) - \mathscr{L}(f, S) \leq \mathscr{U}(f_n, S) - \mathscr{L}(f_n, S) + 2\varepsilon(b - a).$$

Soit un entier $n \geq N$ et soit S une subdivision telle que $\mathscr{U}(f_n, S) - \mathscr{L}(f_n, S) \leq \varepsilon$. Pour toute subdivision S, on a $\mathscr{U}(f, S) - \mathscr{L}(f, S) \leq \varepsilon(1 + 2b - 2a)$. On en déduit que la fonction f est intégrable. □

Corollaire 2.2.1 *L'espace E est complet pour la norme de la convergence uniforme,* i.e. *c'est un espace de* Banach*.*

Corollaire 2.2.2 *Une fonction continue est Riemann–intégrable.*

Démonstration.
Il suffit d'utiliser la proposition 2.2.1. □

2.3 Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $S = (s_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On appelle le nombre

$$\mathscr{R}(f, S, c) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(s_i - s_{i-1}),$$

où $c = (c_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $c_i \in [s_{i-1}, s_i[$, *somme de Riemann* de la fonction f associée à la subdivision S. On a évidemment

$$\mathscr{L}(f, S) \leq \mathscr{R}(f, S, c) \leq \mathscr{U}(f, S). \tag{2.1}$$

De plus, si f est Riemann–intégrable, on a par définition

$$\lim_{h_S \to 0} \mathscr{L}(f, S) = \lim_{h_S \to 0} \mathscr{U}(f, S).$$

En prenant la limite dans (2.1), on obtient

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{h_S \to 0} \mathscr{R}(f, S, c).$$

On en déduit que si la fonction f est Riemann–intégrable alors la limite des sommes de Riemann existe.

Lemme 2.3.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $\lim_{h_S \to 0} \mathscr{R}(f, S, c)$ existe alors f est bornée.*

Démonstration. Supposons la fonction f non bornée et soit $I = \lim_{h_S \to 0} \mathscr{R}(f, S, c)$. Soit S une subdivision telle que $|\mathscr{R}(f, S, c) - I| < 1$. On a

$$|\mathscr{R}(f, S, c) - \mathscr{R}(f, S, c')| < 2$$

pour tous points c, c' associés à la subdivision S. Supposons que la fonction f soit non bornée sur l'intervalle $[s_0, s_1[$ et fixons c dans S. Soit $c'_i = c_i$, $2 \leq i \leq n$ et c'_1 tel que $f(c'_1) > N$. Alors

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(f, S, c') - \mathscr{R}(f, S, c) &= (f(c'_1) - f(c_1))(s_1 - s_0) \\ &> (N - f(c_1))(s_1 - s_0). \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir N assez grand pour que les deux sommes diffèrent de plus que 2. □

Proposition 2.3.1 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann–intégrable si et seulement si*

$$\lim_{h_S \to 0} \mathscr{R}(f, S, c)$$

existe. Dans ce cas, cette limite est égale à l'intégrale de f.

Démonstration. Il suffit de montrer que si la limite $\lim_{h_S \to 0} \mathscr{R}(f, S, c)$ existe alors la fonction f est Riemann–intégrable.
Soit un réel $\varepsilon > 0$ et soit une subdivision S telle que $|\mathscr{R}(f, S, c) - I| < \varepsilon$ pour tout c associé à la subdivision S, où $I = \lim_{h_S \to 0} \mathscr{R}(f, S, c)$. Alors, pour tous c, c' dans la subdivision S on a $|\mathscr{R}(f, S, c) - \mathscr{R}(f, S, c')| < 2\varepsilon$. Montrons que l'on peut choisir c, c' tels que

$$\mathscr{L}(f, S) \leq \mathscr{R}(f, S, c) < \mathscr{L}(f, S) + \varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\mathscr{U}(f, S) - \varepsilon < \mathscr{R}(f, S, c') \leq \mathscr{U}(f, S). \tag{2.3}$$

Dans ce cas, on aurait

$$\mathscr{U}(f, S) - \mathscr{L}(f, S) < 2\varepsilon.$$

Soit la subdivision $S = (s_i)_{0 \leq i \leq n}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note

$$m_i = \inf\{f(x);\ s_{i-1} \leq x < s_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x);\ s_{i-1} \leq x < s_i\},$$

et on choisit c_i tel que

$$f(c_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f, S) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(s_i - s_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(s_i - s_{i-1}) = \mathscr{R}(f, S, c) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)(s_i - s_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} m_i(s_i - s_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}).
\end{aligned}$$

De même, on choisit c' tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$f(c_i') > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

D'où les relations (2.2). Les relations (2.3) se démontrent de la même façon. □

2.4 Propriétés des fonctions intégrables

Définition 2.4.1 *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est* négligeable *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'intervalles $I_n =]a_n, b_n[$ telle que*

$$A \subset \bigcup_{n \geq 0} I_n, \ \sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

Nous pouvons ainsi montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable et qu'un ensemble réduit à un point est négligeable.

Proposition 2.4.1 *Pour qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit Riemann–intégrable, il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuité de f soit négligeable.*

Nous avons alors les corollaires suivants.

Corollaire 2.4.1 *Le produit de deux fonctions Riemann–intégrables est une fonction Riemann–intégrable.*

Corollaire 2.4.2 *Soit f une fonction Riemann–intégrable. Alors la fonction $|f|$ est Riemann–intégrable. De plus, on a*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le (b-a)\,\|f\|$$

où $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Démonstration. La fonction $|f|$ est continue en tout point où f est continue. De plus, comme

$$-|f| \le f \le |f|,$$

on déduit

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

D'où la première inégalité. La second inégalité s'obtient par la même méthode. □

Soient maintenant quatre points $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \le c \le d \le b$ et soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est Riemann–intégrable sur $[c,d]$ si la fonction $f_{|[c,d]}$ est Riemann–intégrable.

Supposons que f soit Riemann–intégrable sur $[a,b]$ et soit $c \in]a,b[$. Ceci est équivalent à dire, d'après la proposition 2.4.1, que f est Riemann–intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$. De plus, soient S' et S'' sont deux subdivisions respectives des intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$. L'ensemble $S = S' \cup S''$ est une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ et on a les identités :

$$\mathscr{L}(f,S) = \mathscr{L}(f,S') + \mathscr{L}(f,S''),$$
$$\mathscr{U}(f,S) = \mathscr{U}(f,S') + \mathscr{U}(f,S'').$$

On en déduit que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Remarque 2.4.1 *Si $c < d$, on note, par convention*

$$\int_d^c f(x)\,dx = -\int_c^d f(x)\,dx.$$

2.5 Primitives

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann–intégrable et soit la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Proposition 2.5.1 *La fonction F est continue. De plus, si la fonction f est continue en $x \in [a,b]$ alors F est dérivable en x et on a $F'(x) = f(x)$.*

Démonstration. Soient $x, y \in [a,b]$ avec $x \leq y$. On a

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq (y-x)\|f\|,$$

où $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On en déduit que la fonction f est continue (et même lipschitzienne).
Supposons la fonction f continue en un point $x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\theta > 0$ telle que $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in [a,b]$ tel que $|y-x| \leq \theta$. Pour tout $y \in [a,b]$, on a

$$F(y) - F(x) - (y-x)f(x) = \begin{cases} \int_x^y (f(t) - f(x))\,dt & \text{si } x \leq y, \\ -\int_y^x (f(t) - f(x))\,dt & \text{si } y \leq x. \end{cases}$$

Donc, pour $|y-x| \leq \theta$,

$$|F(y) - F(x) - (y-x)f(x)| \leq \varepsilon |y-x|.$$

On en déduit que si $x \in]a,b[$, la fonction F est dérivable au point x et sa dérivée est $f(x)$. Si $x = a$, la fonction F est dérivable à droite en x et $F'_d(x) = f(x)$ et si $x = b$, F est dérivable à gauche et $F'_g(x) = f(x)$. $\square$

Définition 2.5.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet une primitive s'il existe une fonction dérivable $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, appelée* primitive de f, *telle que $F' = f$.*

Corollaire 2.5.1 *Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet une primitive.*

Proposition 2.5.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann–intégrable admettant une primitive F. Pour tout $x \in [a,b]$, on a*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Démonstration. Il suffit de montrer la proposition pour $x = b$. Soit $s = (s_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. On a

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(s_i) - F(s_{i-1})).$$

D'après la formule des accroissements finis, il existe pour tout i, $1 \leq i \leq n$, un point x_i de l'intervalle $]s_{i-1}, s_i[$ tel que

$$F(s_i) - F(s_{i-1}) = (s_i - s_{i-1})f(x_i).$$

Donc

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})f(x_i).$$

D'où

$$\mathscr{L}(f,S) \leq F(b) - F(a) \leq \mathscr{U}(f,S).$$

En passant aux bornes de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{U}$, nous obtenons le résultat. $\square$

2.6 Changement de variables

Proposition 2.6.1 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $\phi : [c,d] \to [a,b]$ une fonction dérivable et telle que $\phi(c) = a$ et $\phi(d) = b$. On suppose que la fonction f possède une primitive sur $[a,b]$, que f est intégrable sur $[a,b]$ et que les fonctions $f \circ \phi$ et ϕ' sont intégrables sur $[c,d]$. Alors, la fonction $(f \circ \phi)\phi'$ est intégrable sur $[c,d]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(y))\phi'(y)\,dy.$$

Démonstration. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. D'après la proposition 2.5.2, on a

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Par ailleurs, la fonction $F \circ \phi$ est dérivable et sa dérivée est $(f \circ \phi)\,\phi'$. Cette fonction est intégrable puisqu'elle est produit de fonctions intégrables. La proposition 2.5.2 implique alors

$$F(\phi(d)) - F(\phi(c)) = \int_c^d f(\phi(y))\phi'(y)\,dy.$$

D'où le résultat. $\square$

2.7 Intégrales impropres

Proposition 2.7.1 *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

est continue.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue, donc Riemann–intégrable. Soit $t \in \mathbb{R}$; pour toute suite (t_n) tendant vers t, la suite $(f(x,t_n))$ tend vers $f(x,t)$, uniformément pour $x \in [a,b]$. Comme l'intégrale est continue relativement à la norme de la convergence uniforme sur $[a,b]$, la suite $(F(t_n))$ tend vers $F(t)$. D'où le résultat. $\square$

Soit maintenant $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction Riemann–intégrable sur tout segment $[a, y]$, $y \geq a$. Supposons que l'intégrale

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$$

ait une limite $I \in \mathbb{R}$ lorsque $y \to +\infty$. On dit alors que l'intégrale

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

est *convergente*. Dans le cas contraire ($F(y)$ tend vers l'infini ou la limite n'existe pas), on dit que l'intégrale est *divergente*.

Proposition 2.7.2 *(***Condition de Cauchy***)*
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction Riemann–intégrable sur tout segment* $[a, y]$, $a \leq y$. *Pour que l'intégrale impropre*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

soit convergente, il faut et il suffit que

$$\lim_{y,z\to+\infty} \int_y^z f(x)\,dx = 0. \tag{2.4}$$

Démonstration. Posons

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx.$$

La condition (2.4) signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \in [a, +\infty]$ tel que l'on ait $|F(y') - F(y)| \leq \varepsilon$ pour y et $y' \geq \lambda$. En utilisant le critère de Cauchy pour les suites réelles, on voit que la condition (2.4) est nécessaire et suffisante pour que $F(y)$ ait une limite lorsque $y \to +\infty$. □

3

Mesure de Lebesgue

Considérons la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, (la fonction indicatrice de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$) définie sur $[0,1]$. Grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a pour toute subdivision S de l'intervalle $[0,1]$:

$$\mathscr{L}(f,S) = 0, \ \mathscr{U}(f,S) = 1.$$

Ceci veut dire que cette fonction n'est pas Riemann–intégrable. Pourtant, si l'on utilise l'interprétation géométrique de l'intégrale de f, on voit que cette intégrale "pourrait" avoir un sens. Ainsi, si on affectait une mesure nulle à l'ensemble $\mathbb{Q}$ (et à tout ensemble dénombrable), on obtiendrait une intégrale nulle de f.
Toutes ces considérations indiquent la nécessité d'une nouvelle théorie de l'intégration.

3.1 Mesure sur un intervalle borné

3.1.1 Définition

Dans ce qui suit, pour tout intervalle borné I de $\mathbb{R}$ on appelle $\ell(I)$ la longueur de I. Soit E un sous-ensemble de $[0,1]$ et soit un recouvrement dénombrable de E en intervalles I_j, *i.e.*, une famille d'intervalles I_j tels que $E \subset \bigcup_j I_j$. On appelle *mesure extérieure de Lebesgue* ou simplement *mesure de Lebesgue* de E le nombre

$$m(E) := \inf\Big\{\sum_j \ell(I_j);\ E \subset \bigcup_j I_j\Big\}. \tag{3.1}$$

Cette définition reste la même si l'on utilise des intervalles I_j ouverts, fermés ou les deux à la fois. En effet, Si (I_j) est un recouvrement en intervalles ouverts de E, il existe un recouvrement (K_j) en intervalles fermés donnant la même longueur. Ainsi, l'utilisation de recouvrement en fermés pourrait donner une plus petite valeur de $m(E)$. Or, pour chaque recouvrement fermé (I_k), il existe un recouvrement ouvert (J_k) dont la longueur est inférieure à $\sum_k \ell(I_k)+\varepsilon$, en choisissant par exemple (J_k) tel que $\ell(J_k) < \ell(I_k)+\varepsilon/2^k$. Donc, à tout recouvrement fermé (I_j) on peut associer des recouvrements ouverts avec des longueurs totales

arbitrairement proches de la longueur totale de I_j. Ainsi, la borne inférieure des longueurs totales est la même.
Il est ainsi aisé de montrer le résultat suivant.

Proposition 3.1.1 *Si $I = [a, b] \subset]0, 1[$ ou $I =]a, b[\subset]0, 1[$, alors $m(I) = \ell(I)$.*

Lemme 3.1.1 *Soit (I_j) un recouvrement fini de $[0, 1]$ en intervalles disjoints deux à deux, $1 \leq j \leq n$ et soit $E = \cup_{j=1}^n I_j$. Alors*

$$m(E) = \sum_{j=1}^{n} \ell(I_j).$$

Démonstration. On a évidemment $m(E) \leq \sum_j \ell(I_j)$. Soit maintenant (I_j) un recouvrement de E. Étant donné un $\varepsilon > 0$, on choisit I'_j pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_j \subseteq \text{Int}(I'_j)$ et $\ell(I'_j) \leq \ell(I_j) + 2^{-j}\varepsilon$. Comme E est compact, on peut extraire un recouvrement fini $\{I'_1, \ldots, I'_m\}$ de E. En particulier, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \ell(I_j) &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \ell(I_j \cap I'_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \ell(I'_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I'_k) \leq \sum_{k} \ell(I_k) + \varepsilon.\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers zéro et en prenant le borne inférieure, on obtient le résultat désiré.

Nous pouvons maintenant énoncer les premières propriétés de la mesure m.

Proposition 3.1.2 *On a les propriétés suivantes :*
(i) $m(E) \leq m(F)$ *si* $E \subset F$ *(Monotonie) ;*
(ii) $0 \leq m(E) \leq 1$ *pour tout ensemble* $E \subset]0, 1[$ *;*
(iii) $m(\emptyset) = 0$ *;*
(iv) $m(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in [0, 1]$.

Démonstration.

(i) Si (I_j) est un recouvrement de F alors (I_j) est un recouvrement de E. On en déduit que $m(E) \leq m(F)$.

(ii) D'après (3.1), le nombre $m(E)$ est borne inférieure de nombres positifs. Donc $m(E) \geq 0$. Nous notons en outre que, par la proposition 3.1.1, $m([0, 1]) = 1$. Donc, d'après (i), $m(E) \leq m(]0, 1[) = 1$.

(iii) Évident.

(iv) L'union d'intervalles de la forme $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ constitue un recouvrement de l'ensemble $\{x\}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat. □

Proposition 3.1.3 *Pour toute famille dénombrable (E_i) de sous-ensembles de $[0, 1]$, on a*

$$m\Big(\bigcup_{j \geq 1} E_j\Big) \leq \sum_{j \geq 1} m(E_j).$$

On dit alors que la mesure m est sous-additive.

Démonstration. Pour un élément E_i de la famille dénombrable, soit $\varepsilon > 0$ et soit (I_{ij}) un recouvrement de E_i en intervalles ouverts tel que

$$m(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} > \sum_{j\geq 1} \ell(I_{ij}).$$

Alors

$$\bigcup_{i\geq 1} E_i \subset \bigcup_{i,j\geq 1} I_{ij}.$$

Donc

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) \leq \sum_{i,j\geq 1} \ell(I_{ij}) \leq \sum_{i\geq 1} \Big(m(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) = \sum_{i\geq 1} m(E_i) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro, nous obtenons

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) \leq \sum_{i\geq 1} m(E_i). \qquad \square$$

3.1.2 Ensembles mesurables

Une propriété essentielle que nous voudrions obtenir pour une mesure est son *additivité*. En d'autres termes, nous voudrions obtenir l'identité

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) = \sum_{i\geq 1} m(E_i) \tag{3.2}$$

pour toute famille d'ensembles (E_i) disjoints deux à deux. Nous parlerons alors d'*ensembles mesurables*.

Définition 3.1.1 *On dira qu'un ensemble E est* mesurable *si*

$$m(E) + m(E^c) = 1,$$

où $E^c :=]0,1[\backslash E$.

Nous pouvons déduire les propriétés immédiates suivantes :

Proposition 3.1.4

(i) L'ensemble E est mesurable si et seulement si son complémentaire E^c est mesurable.

(ii) Si $m(E) + m(E^c) \leq 1$ alors E est mesurable.

(iii) Si $m(E) = 0$ alors E est mesurable.

(iv) Les intervalles sont des ensembles mesurables.

Démonstration.

(i) Évident. Il suffit d'intervertir le rôle de E et E^c.

(ii) Résulte immédiatement de la proposition 3.1.3. Cette inégalité est donc une caractérisation de la mesurabilité.

(iii) Supposons $m(E) = 0$. On a

$$m(E) + m(E^c) = m(E^c) \leq 1.$$

Ceci équivaut à la mesurabilité.

(iv) Évident, puisque le complémentaire d'un intervalle est union disjointe d'intervalles. □

Lemme 3.1.2 *Si $(I_j)_{j\geq 1}$ est une famille dénombrable d'intervalles disjoints deux à deux de l'intervalle $]0,1[$, alors pour tout ensemble E on a*

$$m\Big(E \cap \bigcup_{j\geq 1} I_j\Big) = \sum_{j\geq 1} m(E \cap I_j).$$

Démonstration. Considérons d'abord une famille finie d'intervalles disjoints $I_1, \ldots, I_n$ et supposons, sans restriction de généralité, que $E \subset I_1 \cup \ldots \cup I_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $(J_k)_{k\geq 1}$ un recouvrement de E tel que

$$\sum_{k\geq 1} \ell(J_k) < m(E) + \varepsilon.$$

Les ensembles $J_k \cap I_j$, $k = 1, 2, \ldots$ forment un recouvrement de l'ensemble $E \cap I_j$. De plus, on a

$$\ell(J_k \cap I_1) + \ldots + \ell(J_k \cap I_n) \leq \ell(J_k).$$

Donc

$$m(E \cap I_j) \leq \sum_{k\geq 1} \ell(J_k \cap I_j),$$

et

$$\begin{aligned} m(E) &\leq \sum_{j\geq 1} m(E \cap I_j) \\ &\leq \sum_{j\geq 1}\sum_{k\geq 1} \ell(J_k \cap I_j) \\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} \ell(J_k \cap I_j) \\ &\leq \sum_{k\geq 1} \ell(J_k) \\ &< m(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$m(E) = \sum_{j\geq 1} m(E \cap I_j) \quad \text{si } E \subset J_1 \cup \ldots \cup J_n.$$

Soit maintenant (I_j) un recouvrement dénombrable de E par intervalles disjoints deux à deux. En utilisant la sous-additivité et la monotonie, on obtient

$$\begin{aligned} m\Big(E \cap \bigcup_{j\geq 1} I_j\Big) &\leq \sum_{j\geq 1} m(E\cap I_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} m(E\cap I_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(E\cap (I_1\cup \ldots \cup I_n)) \\ &\leq m\Big(E\cap \bigcup_{j\geq 1} I_j\Big). \end{aligned}$$

Ainsi la première inégalité est une égalité et le résultat est montré. □

On a vu qu'un ensemble est mesurable si et seulement si il partitionne l'intervalle $[0,1]$ *additivement*. Le résultat suivant montre qu'il est mesurable si et seulement si il partitionne chaque sous-intervalle de $[0,1]$ additivement.

Proposition 3.1.5 *Un ensemble E est mesurable si et seulement si, pour tout intervalle $I \subset]0,1[$,*

$$m(E\cap I) + m(E^c \cap I) = m(I).$$

Démonstration. Notons I l'intervalle $I =]a,b[$ avec $0 < a < b < 1$. Soit en outre les intervalles

$$I_1 =]0,a[\,,\ I_2 = I =]a,b[\,,\ I_3 =]b,1[\,.$$

Or, on a par la monotonie des mesures et grâce à la propriété $m(\{a,b\}) = 0$,

$$m(E) \leq m(E\setminus\{a,b\}) + m(\{a,b\}) = m(E\setminus\{a,b\}).$$

D'où $m(E\setminus\{a,b\}) = m(E)$, et de même $m(E^c\setminus\{a,b\}) = m(E^c)$. Donc, par le lemme 3.1.2 :

$$\begin{aligned} m(E) &= m(E\cap I_1) + m(E\cap I_2) + m(E\cap I_3), \\ m(E^c) &= m(E^c\cap I_1) + m(E^c\cap I_2) + m(E^c\cap I_3). \end{aligned}$$

En additionnant, nous obtenons, puisque $(E\cap I_j)\cup(E^c\cap I_j) = I_j$ et grâce à la sous-additivité

$$\begin{aligned} m(E) + m(E^c) &= \sum_{j=1}^{3} (m(E\cap I_j) + m(E^c\cap I_j)) \\ &\geq \sum_{j=1}^{3} m\big((E\cap I_j)\cup(E^c\cap I_j)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{3} m(I_j) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, si $m(E \cap I_j) + m(E^c \cap I_j) = m(I_j)$ pour tout j, nous obtenons $m(E) + m(E^c) = 1$; donc E est mesurable. Inversement si $m(E) + m(E^c) = 1$, on a

$$\sum_{j=1}^{3} (m(E \cap I_j) + m(E^c \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{3} m(I_j)$$

pour tout j. Or puisque

$$m(I_j) \leq m(E \cap I_j) + m(E^c \cap I_j)) \qquad \text{pour } j = 1, 2, 3,$$

nous obtenons l'égalité. Si I est de la forme $]0, a[$ ou $]b, 1[$ le même argument fonctionne en considérant un seul intervalle complémentaire. □

Proposition 3.1.6 *(***Caractérisation de Carathéodory***)*
L'ensemble E est mesurable si et seulement si on a

$$m(E \cap T) + m(E^c \cap T) \leq m(T)$$

pour tout « ensemble test » T.

Démonstration. La condition est suffisante puisqu'il suffit de prendre $T =]0, 1[$. Montrons que la condition est nécessaire.
Soit T une partie quelconque de $]0, 1[$ et soit $\varepsilon > 0$ et (I_j) un recouvrement dénombrable de T par des intervalles ouverts tels que

$$\sum_{j \geq 1} m(I_j) < m(T) + \varepsilon.$$

Alors

$$E \cap T \subset \bigcup_{j \geq 1} (E \cap I_j), \quad E^c \cap T \subset \bigcup_{j \geq 1} (E^c \cap I_j).$$

Si E est mesurable, on a

$$m(E \cap I_j) + m(E^c \cap I_j) = m(I_j) \qquad \text{pour tout } j.$$

Utilisant la monotonie et la sous-additivité, nous obtenons

$$\begin{aligned} m(E \cap T) + m(E^c \cap T) &\leq \sum_{j \geq 1} m(E \cap I_j) + \sum_{j \geq 1} m(E^c \cap I_j) \\ &= \sum_{j \geq 1} m(I_j) < m(T) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque ε est arbitraire, nous pouvons conclure. □

Proposition 3.1.7 *Soit (E_i) une famille dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux et mesurables. Alors*

$$m\Big(\bigcup_{i \geq 1} E_i\Big) = \sum_{i \geq 1} m(E_i).$$

Démonstration. Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ une famille finie d'ensembles disjoints deux à deux et mesurables. On a par la proposition précédente avec $T = E_1 \cup \ldots \cup E_n$,

$$m(E_1) + m(E_2 \cup \cdots \cup E_n) = m(E_1 \cup \cdots \cup E_n).$$

De même, pour $T = E_2 \cup \ldots \cup E_n$,

$$m(E_2) + m(E_3 \cup \cdots \cup E_n) = m(E_2 \cup \cdots \cup E_n).$$

Donc

$$m(E_1) + m(E_2) + m(E_3 \cup \cdots \cup E_n) = m(E_1 \cup \cdots \cup E_n).$$

On en déduit

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Supposons maintenant que la famille (E_i) soit dénombrable. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) \geq m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i);$$

donc

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) \geq \sum_{i\geq 1} m(E_i). \qquad \square$$

Proposition 3.1.8 *Si (E_i) est une famille dénombrable d'ensembles mesurables, alors $\cup_i E_i$ est mesurable. Les ensembles ouverts et les ensembles fermés sont mesurables.*

3.2 Mesure sur un ensemble quelconque de $\mathbb{R}$

Définition 3.2.1 *Soit X un ensemble et soit $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On appelle* algèbre *sur X toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $X,\ \emptyset \in \mathscr{A}$;
(ii) Si $E \in \mathscr{A}$ alors $E^c := X \setminus E \in \mathscr{A}$;
(iii) Si $E_1, E_2 \in \mathscr{A}$ alors $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{A}$, i.e. *$\mathscr{A}$ est fermé pour l'union.*

On peut montrer aisément qu'une algèbre est aussi fermée pour les unions et intersections finies d'ensembles.

Définition 3.2.2 *Soit X un ensemble et soit $\mathscr{A}$ une algèbre sur X. On dit que $\mathscr{A}$ est une* tribu (ou σ–algèbre) *sur X si $\mathscr{A}$ est fermée pour les unions dénombrables,* i.e. *:*

$$\textit{si} \quad (E_i)_{i\geq 1} \in \mathscr{A} \quad \textit{alors} \quad \bigcup_{i\geq 1} E_i \in \mathscr{A}.$$

Proposition 3.2.1 *L'ensemble des parties mesurables de l'intervalle $]0,1[$ forme une tribu.*

Nous voulons maintenant étendre la notion de mesure à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit E une partie de l'intervalle $]n, n+1[$. On définit

$$\mu(E) = m(E-n), \quad \text{où} \quad E-n := \{x-n;\ x \in E\}.$$

Ainsi on a évidemment $\mu(E) = m(E)$ si $E \subset]0,1[$. Soit maintenant E une partie de $\mathbb{R}$, on définit

$$\mu(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E\cap]n, n+1[).$$

Remarque 3.2.1 *On déduit de cette définition que si E est dénombrable alors $\mu(E) = 0$. De plus, la mesure μ peut être infinie.*

Définition 3.2.3 *Une partie E de $\mathbb{R}$ est dite* mesurable *si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $E\cap]n, n+1[$ est mesurable,* i.e., *si on a*

$$\mu(E\cap]n, n+1[) + \mu(E^c\cap]n, n+1[) = 1.$$

Proposition 3.2.2 *Une partie E de $\mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si, pour tout ensemble T de $\mathbb{R}$,*

$$\mu(E \cap T) + \mu(E^c \cap T) = \mu(T). \tag{3.3}$$

Démonstration. On a par définition

$$\mu(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(T\cap]n, n+1[),$$
$$\mu(T \cap E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(T \cap E\cap]n, n+1[),$$
$$\mu(T \cap E^c) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(T \cap E^c\cap]n, n+1[).$$

Donc, si E est mesurable, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en choisissant pour un ensemble test $T\cap]n, n+1[$,

$$\mu(T \cap E\cap]n, n+1[) + \mu(T \cap E^c\cap]n, n+1[) = \mu(T\cap]n, n+1[).$$

D'où le résultat (3.3). Réciproquement, si la relation (3.3) a lieu pour tout T, alors si on choisit $T =]n, n+1[$, tout ensemble $E\cap]n, n+1[$ est mesurable. $\square$

Proposition 3.2.3 *La mesure de Lebesgue μ est invariante par translation,* i.e., *pour toute partie E de $\mathbb{R}$,*

$$\mu(E+x) = \mu(E) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4

Intégrale de Lebesgue

Nous allons, dans ce chapitre, définir une nouvelle notion de l'intégrale. Nous commençons par définir cette intégrale (de Lebesgue) pour des fonctions bornées, puis étendons la définition à des fonctions non bornées.

4.1 Intégration de fonctions bornées

Soit E un ensemble mesurable de mesure finie. On appellera *partition* de E toute famille *finie* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de parties mesurables disjointes deux à deux de E, dont l'union est E. Si $\mathscr{P}$ est une partition de E, on dira qu'une partition $\mathscr{Q}$ est plus fine que $\mathscr{P}$ (on notera $\mathscr{Q} \succ \mathscr{P}$ ou $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$) si tout $F \in \mathscr{Q}$ est un sous-ensemble d'un ensemble $E \in \mathscr{P}$. Si $\mathscr{P} = \{E_i\}$ et si $\mathscr{Q} \succ \mathscr{P}$, on notera $\mathscr{Q} = \{F_{ij}\}$ pour indiquer que $E_i = \cup_j F_{ij}$ pour tout $E_i \in \mathscr{P}$. Notons que si $\mathscr{P} = \{E_i\}$ est une partition de E alors $\mu(E) = \sum_i \mu(E_i)$.
Soit maintenant f une fonction bornée sur un ensemble E mesurable de mesure finie et soit $\mathscr{P} = \{E_i\}$ une partition de E. On définit, d'une manière analogue au chapitre 1, les quantités :

$$m_i = \inf\{f(x);\ x \in E_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x);\ x \in E_i\},$$
$$\mathscr{L}(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(E_i), \quad \mathscr{U}(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(E_i).$$

Notons que si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $\mathscr{P}$ est une partition de E en intervalles, alors les nombres $\mathscr{L}(f, \mathscr{P})$ et $\mathscr{U}(f, \mathscr{P})$ ont la même signification qu'au chapitre 1.

Proposition 4.1.1 *Si E est un ensemble de mesure finie et si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in E$ et $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux partitions de E satisfaisant $\mathscr{Q} \succ \mathscr{P}$, alors*

$$m\mu(E) \leq \mathscr{L}(f, \mathscr{P}) \leq \mathscr{L}(f, \mathscr{Q}) \leq \mathscr{U}(f, \mathscr{Q}) \leq \mathscr{U}(f, \mathscr{P}) \leq M\mu(E).$$

Démonstration. Soient $\mathscr{P} = \{E_i\}$ et $\mathscr{Q} = \{F_{ij}\}$ avec $E_i = \cup_j F_{ij}$ pour tout i. Soit maintenant

$$m_i = \inf\{f(x);\ x \in E_i\},\ m_{ij} = \inf\{f(x);\ x \in F_{ij}\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f,\mathscr{P}) &= \sum_i m_i \mu(E_i) \\ &= \sum_i m_i \sum_j \mu(F_{ij}) \\ &\le \sum_{i,j} m_{ij}\mu(F_{ij}) \\ &= \mathscr{L}(f,\mathscr{Q}).\end{aligned}$$

De la même manière on démontre que $\mathscr{U}(f,\mathscr{Q}) \le \mathscr{U}(f,\mathscr{P})$. □

Définition 4.1.1 *Soit E un ensemble de mesure finie et soit f une fonction définie et bornée sur E. On dit que f est* intégrable au sens de Lebesgue *(ou* Lebesgue–intégrable *ou simplement* intégrable*) si*

$$\sup_{\mathscr{P}} \mathscr{L}(f,\mathscr{P}) = \inf_{\mathscr{P}} \mathscr{U}(f,\mathscr{P}).$$

Dans ce cas, on appelle cette valeur commune intégrale de f, *et on note*

$$\int f := \sup_{\mathscr{P}} \mathscr{L}(f,\mathscr{P}) = \inf_{\mathscr{P}} \mathscr{U}(f,\mathscr{P}).$$

Proposition 4.1.2 *Si f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a,b]$ alors f est intégrable au sens de Lebesgue et les deux intégrales coïncident.*

Démonstration. Si f est Riemann–intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ en intervalles telle que

$$\mathscr{U}(f,\mathscr{P}) - \mathscr{L}(f,\mathscr{P}) < \varepsilon.$$

Donc f est intégrable au sens de Lebesgue. La valeur de chacune des deux intégrales est entre toute borne inférieure et toute somme supérieure, d'où la coïncidence. □

Soit ϕ une fonction définie sur E. On dit que ϕ est une *fonction simple* ou *étagée* s'il existe une partition $\mathscr{P} = \{E_1,\ldots,E_n\}$ de E et des réels $\{y_1,\ldots,y_n\}$ tels que ϕ s'écrit sous la forme

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{1}_{E_i}.$$

4.2 Fonctions mesurables

Définition 4.2.1 *On dit qu'une fonction f définie sur E est* mesurable *si l'ensemble*

$$\{x \in E;\ a \le f(x) < b\}$$

est mesurable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2.1 *Soit f une fonction bornée et mesurable sur un ensemble E de mesure finie. Alors f est Lebesgue–intégrable sur E.*

Démonstration. Supposons que $-M \leq f(x) < M$ pour tout $x \in E$. Soit N un entier suffisamment grand et soit

$$E_i = \left\{x \in E;\ -M + \frac{i-1}{N} \leq f(x) < -M + \frac{i}{N}\right\}, \quad 1 \leq i \leq 2MN.$$

Alors $\mathscr{P} = \{E_i\}$ est une partition de E et

$$\mathscr{U}(f, \mathscr{P}) - \mathscr{L}(f, \mathscr{P}) \leq \sum_i \frac{1}{N}\mu(E_i) = \frac{1}{N}\mu(E).$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient le résultat désiré. □

Nous donnons maintenant plusieurs caractérisations de la mesurabilité d'une fonction.

Proposition 4.2.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est mesurable sur E ;
(ii) $\{x \in E;\ f(x) \geq a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(iii) $\{x \in E;\ f(x) < a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(iv) $\{x \in E;\ f(x) > a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(v) $\{x \in E;\ f(x) \leq a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(vi) $\{x \in E;\ a < f(x) < b\}$ est mesurable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons que les ensembles définis dans (ii) et (iii) sont complémentaires, et de même pour les ensembles définis dans (iv) et (v). Si f est mesurable, alors l'ensemble $\{x \in E;\ f(x) \geq a\}$ est union dénombrable des ensembles mesurables $\{x \in E;\ a \leq f(x) < a + n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Inversement, si l'ensemble $\{x \in E;\ a \leq f(x)\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\{x \in E;\ a \leq f(x) < b\} = \{x \in E;\ a \leq f(x)\} \setminus \{x \in E;\ b \leq f(x)\}$$

est mesurable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et donc f est mesurable. Les autres équivalences peuvent être établies d'une manière analogue, en utilisant le fait que la mesurabilité des ensembles est fermée pour les unions et intersections dénombrables et pour la complémentarité. □

Proposition 4.2.3 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble E, alors les fonctions $\sup f_n$, $\inf f_n$ sont mesurables. Si de plus, $\lim f_n(x)$ existe pour tout $x \in E$ alors la limite est une fonction mesurable.*

Démonstration. Pour montrer que $\sup f_n$ est mesurable, il suffit de vérifier la propriété (iv) de la proposition 4.2.2. On a

$$\{x \in E;\ \sup f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in E;\ f_n(x) > a\}.$$

Donc l'ensemble $\{x \in E;\ \sup f_n(x) > a\}$ est une union dénombrable d'ensembles mesurables si f_n est une fonction mesurable. De même

$$\{x \in E;\ \inf f_n(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in E;\ f_n(x) < a\};$$

donc $\inf f_n$ est mesurable.
Si $\sup f_n$ prend la valeur $+\infty$, alors

$$\{x \in E;\ \sup f_n(x) = +\infty\} = \bigcap_N \bigcup_n \{x \in E;\ f_n(x) > N\},$$

et cet ensemble est mesurable. La même identité a lieu là où $\inf f_n(x) = -\infty$. □

Proposition 4.2.4 *Soient f et g deux fonctions mesurables sur un ensemble E et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors, les fonctions $f + g$ et kf sont mesurables.*

Démonstration. Il est évident que si f est mesurable alors kf l'est aussi. L'inégalité $f(x) + g(x) > a$ est équivalente à $f(x) > a - g(x)$. Celle-ci est vraie si et seulement si il existe un nombre rationnel r tel que

$$f(x) > r \text{ et } r > a - g(x).$$

Donc

$$\{x \in E;\ f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E;\ f(x) > r\} \cap \{x \in E;\ g(x) > a - r\}.$$

Le membre de droite de cette inégalité est une union dénombrable d'ensembles mesurables ; c'est donc un ensemble mesurable. □

Remarque 4.2.1 *Si f est mesurable sur E alors l'ensemble E est mesurable. En effet, on peut écrire*

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x;\ f(x) > n\},$$

et utiliser le fait que toute union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

4.3 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Nous définissons maintenant la somme de Riemann d'une fonction Lebesgue–intégrable, *i.e.*, pour une partition de $\mathscr{P} = \{E_i\}$ de l'ensemble E et pour un choix de points $c_i \in E_i$, on définit

$$\mathscr{R}(f, \mathscr{P}, c) := \sum_i f(c_i)\mu(E_i).$$

Proposition 4.3.1 *Si f est une fonction bornée et intégrable sur un ensemble de mesure finie E alors*

$$\mathscr{R}(f, \mathscr{P}, c) \to \int f.$$

Proposition 4.3.2 *Si f et g sont deux fonctions définies sur E telles que $f = g$ sauf sur un ensemble mesurable de mesure nulle, alors*

$$\lim_{\mathscr{P}} \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, c) = \lim_{\mathscr{P}} \mathscr{R}(g, \mathscr{P}, c)$$

Notons que, dans la proposition précédente, nous n'avons supposé les fonctions f et g ni mesurables ni bornées. De plus, les sommes de Riemann peuvent converger même pour des fonctions non bornées.

Proposition 4.3.3 *Soient f et g deux fonctions bornées et mesurables sur un ensemble E de mesure finie, et soit k une constante, alors on a les propriétés suivantes :*
(i) $\int kf = k \int f$,
(ii) $\int (f+g) = \int f + \int g$,
(iii) $|\int f| \leq \int |f|$.

Démonstration. Nous nous contenterons de montrer la propriété (i).

$$\begin{aligned}
\int kf &= \lim_{\mathscr{P}} \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, c) \\
&= \lim_{\mathscr{P}} \sum_i kf(c_i)\mu(E_i) \\
&= \lim_{\mathscr{P}} k \sum_i f(c_i)\mu(E_i) \\
&= \lim_{\mathscr{P}} k\, \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, c) \\
&= k \lim_{\mathscr{P}} \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, c) \\
&= k \int f. \qquad \square
\end{aligned}$$

Définition 4.3.1 *Soit f est une fonction mesurable et bornée sur un ensemble de mesure finie E et soit F un sous-ensemble mesurable de E. On note*

$$\int_F f = \int \mathbf{1}_F\, f.$$

Proposition 4.3.4 *Soient A et B deux ensembles disjoints et soit f une fonction mesurable et bornée sur l'ensemble $A \cup B$. Alors*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $f = f\,\mathbf{1}_A + f\,\mathbf{1}_B$. $\square$

Nous nous intéressons maintenant au passage à la limite dans les intégrales. Comme nous l'avons décrit plus tôt, l'intégrale de Lebesgue permet d'une manière plus naturelle ce passage à la limite.

Proposition 4.3.5 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble de mesure finie E telle que $f_n \to f$ simplement sur E. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable X avec $\mu(X) < \delta$ et un entier N tel que $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$ et tout $x \in E \setminus X$. On dit alors que f_n converge vers f au sens de la mesure (de Lebesgue).* □

Démonstration. Soit

$$F_n = \{x \in E;\ \text{il existe } k \geq n \text{ avec } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Les ensembles F_n sont mesurables et on a puisque $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$:

$$F_{n+1} \subset F_n,\ \bigcap_n F_n = \emptyset.$$

Puisque $\mu(F_1) < \infty$, on a $\lim \mu(F_n) = 0$. Soit $\mu(F_N) < \delta$. Pour $x \in E \backslash F_N$, on a $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$. Il suffit donc de choisir $X = F_N$. □

Proposition 4.3.6 *(***Théorème d'Egoroff***)*
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble de mesure finie E telle que $f_n \to f$ simplement sur E ; alors pour tout $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable $X \subset E$ avec $\mu(X) < \delta$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus X$.

Proposition 4.3.7 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble de mesure finie E et convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe un nombre M tel que*

$$|f_n(x)| \leq M \quad \textit{pour tout } x \in E,\ n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n = \int f.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit X un ensemble mesurable avec $\mu(X) < \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément en dehors de X. On a

$$\begin{aligned} \left| \int (f_n - f) \right| &\leq \int |f_n - f| \\ &= \int_{E \setminus X} |f_n - f| + \int_X |f_n - f| \\ &< \int_{E \setminus X} |f_n - f| + 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus X$, il existe un entier N tel que $|f_n - f| < \varepsilon$ sur $E \setminus X$ si $n \geq N$. Donc, si $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \int (f_n - f) \right| &\leq \varepsilon\, \mu(E \setminus X) + 2M\varepsilon \\ &= \varepsilon\, (\mu(E \setminus X) + 2M) \\ &\leq \varepsilon\, (\mu(E) + 2M). \end{aligned}$$

Puisque ε est arbitraire et $\mu(E) < \infty$, nous obtenons le résultat. □

4.4 Intégration de fonctions non bornées

Nous allons maintenant pouvoir définir l'intégrale de fonctions non bornées et de fonctions sur des ensembles de mesure non bornée. Ce genre de situations serait exclu pour l'intégrale de Riemann. En particulier, nous verrons que l'intégrale de Lebesgue correspond à l'idée géométrique intuitive de l'intégrale, *i.e.*, l'intégrale est égale à l'aire au-dessus de l'axe des x moins l'aire en dessous. Ces aires devront être finies. Ainsi, on dira que f est Lebesgue–intégrable si et seulement si $|f|$ est Lebesgue–intégrable.
Soit f une fonction positive, mesurable, à valeurs réelles et définie sur un ensemble E (pouvant être $\mathbb{R}$ tout entier). On définit

$$\int f = \sup \left\{ \int g \;;\; 0 \leq g \leq f,\; g \text{ est mesurable et bornée} \right\}.$$

Notons qu'il est possible d'avoir une valeur infinie. Nous dirons que f est *intégrable sur E* si on a

$$\int f \; < +\infty.$$

Proposition 4.4.1 *Soient f et g deux fonctions positives et mesurables sur E, et soit $k \geq 0$; alors :*
 (i) $\int kf = k \int f$ *;*
 (ii) $\int (f+g) = \int f + \int g$ *;*
 (iii) Si $f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$;
 (iv) Si $0 \leq f \leq g$ et si g est intégrable, alors f et $g-f$ sont intégrables et on a $\int g = \int f + \int (g-f)$.

Démonstration. Les propriétés (i) et (iii) sont des conséquences immédiates de la définition. Montrons (ii). Soient h_1, h_2 deux fonctions mesurables et bornées avec $0 \leq h_1 \leq f$ et $0 \leq h_2 \leq g$. Alors $h_1 + h_2$ est mesurable et bornée et on a $0 \leq h_1 + h_2 \leq f + g$. Ainsi

$$\int (f+g) \geq \int (h_1 + h_2) = \int h_1 + \int h_2.$$

En prenant la borne supérieure sur toutes les fonctions h_1 et h_2 mesurables et bornées, on obtient

$$\int (f+g) \geq \int f + \int g.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, soit h une fonction mesurable et bornée avec $0 \leq h \leq f+g$. Soient $h_1 = \min\{f, h\}$ et $h_2 = h - h_1$. Alors, h_1 et h_2 sont mesurables et bornées et de plus

$$0 \leq h_1 \leq f,\; 0 \leq h_2 \leq g,$$

donc

$$\int h = \int (h_1 + h_2) = \int h_1 + \int h_2 \leq \int f + \int g.$$

En prenant la borne supérieure pour toutes les fonctions mesurables et bornées $h \leq f + g$, nous obtenons

$$\int (f+g) \leq \int f + \int g. \qquad \square$$

Corollaire 4.4.1 *Si f et g sont intégrables, alors kf et $f+g$ sont intégrables pour tout $k \in \mathbb{R}$.*

Nous énonçons maintenant les résultats fondamentaux de la théorie de l'intégration.

Proposition 4.4.2 *(***Lemme de Fatou***)*
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\liminf \int f_n \geq \int f.$$

Démonstration. soit h une fonction mesurable bornée avec $0 \leq h \leq f$ et soit $h_n = \min\{f_n, h\}$; les fonctions h_n sont évidemment mesurables et uniformément bornées par la même borne que h. Puisque $f_n \to f \geq h$, on a $h_n \to h$. La proposition 4.3.7 implique $\int h_n \to \int h$. Puisque $\int f_n \geq \int h_n$ pour tout n, on a

$$\liminf \int f_n \geq \lim \int h_n = \int h.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour toute fonction h mesurable et bornée vérifiant $h \leq f$; donc

$$\liminf \int f_n \geq \int f. \qquad \square$$

Proposition 4.4.3 *(***Théorème de la convergence monotone***)*
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers f. Alors

$$\int f_n \to \int f.$$

Démonstration. Comme la suite (f_n) est croissante, on en déduit $f_n \leq f$. D'où

$$\int f_n \leq \int f \quad \text{donc} \quad \limsup \int f_n \leq \int f.$$

Le lemme de Fatou permet de conclure. $\square$

Proposition 4.4.4 *Soit (f_n) une suite de fonctions positives mesurables convergeant vers f. On suppose qu'il existe une fonction intégrable g telle que $0 \leq f_n \leq g$ pour tout n, alors*

$$\int f_n \to \int f.$$

Démonstration. Puisque $f \leq g$, la fonction f est intégrable. Par le lemme de Fatou, il suffit de montrer que

$$\limsup \int f_n \leq \int f.$$

Comme on a

$$0 \leq g - f_n \to g - f,$$

le lemme de Fatou implique

$$\liminf \int (g - f_n) \geq \int (g - f) = \int g - \int f.$$

Or

$$\liminf \left(\int g - \int f_n \right) = \int g - \limsup \int f_n.$$

Donc, puisque g est intégrable

$$\int g - \limsup \int f_n \geq \int g - \int f,$$
$$\limsup \int f_n \leq \int f. \qquad \square$$

Il nous reste maintenant à étendre la définition de l'intégrable de Lebesgue à des fonctions non nécessairement positives. Pour cela, si f est une fonction, nous notons

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Ainsi puisque $f = f^+ - f^-$, nous définissons naturellement

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Nous dirons alors que f est (Lebesgue–) intégrable (ou intégrable sur un ensemble E) si les fonctions f^+ et f^- sont intégrables (sur E).
Nous allons maintenant énoncer les propriétés de base de l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 4.4.5 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur un ensemble E et soit $k \in \mathbb{R}$, alors les fonctions kf et $f + g$ sont intégrables (sur E) et*
(i) $\int kf = k \int f$,
(ii) $\int (f + g) = \int f + \int g$,
(iii) Si $f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$.

Démonstration.

(i) Si $k > 0$, alors $(kf)^+ = kf^+$ et $(kf)^- = kf^-$. Donc, si $k > 0$,

$$\int kf = \int (kf)^+ - \int (kf)^- = k \int f^+ - k \int f^- = k \int f.$$

La même démarche peut être appliquée si $k < 0$.

(ii) Soient h_1 et h_2 deux fonctions quelconques positives et intégrables telles que

$$h_1 - h_2 = h = h^+ - h^-.$$

On a

$$\begin{aligned}
&h_1 + h^- = h_2 + h^+,\\
&\int h_1 + \int h^- = \int h_2 + \int h^+,\\
&\int h_1 - \int h_2 = \int h^+ - \int h^- = \int h.
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $(f^+ + g^+)$ et $(f^- + g^-)$ sont intégrables et positives et que

$$(f^+ + g^+) - (f^- + g^-) = f + g,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-)\\
&= \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^-\\
&= \int f + \int g.
\end{aligned}$$

(iii) Si $f \leq g$, alors $g - f$ est positive et on a par (i) et (ii),

$$\int (g - f) = \int g - \int f.$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.4.6 **(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)**
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers f et vérifiant $|f_n| \leq g$ pour une fonction intégrable g et pour tout n. Alors

$$\int f_n \to \int f.$$

Démonstration. On écrit $f_n = f_n^+ - f_n^-$ et on obtient

$$f_n^+ \to f^+ \quad \text{et} \quad 0 \leq f_n^+ \leq g \quad \text{pour tout } n.$$

Donc, par la proposition 4.4.4, on a

$$\int f_n^+ \to \int f^+.$$

De même, $f_n^- \to f^-$ et $0 \leq f_n^- \leq g$ pour tout n ; et donc

$$\int f_n^- \to \int f^-. \qquad \square$$

Exemple 4.4.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable. On veut calculer la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx.$$

On considère, pour cela, la suite de fonctions $f_n = f\mathbf{1}_{[-n,n]}$. Cette suite converge simplement vers f. De plus, on a $|f_n| \leq |f|$, qui est une intégrable. Le théorème de la convergence dominée implique

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \int f.$$

4.5 Intégrale de Lebesgue et dérivation

Nous allons maintenant examiner dans quelles conditions le théorème fondamental de la théorie de l'intégration :

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a),$$

est valable lorsqu'il s'agit de l'intégrale au sens de Lebesgue. Nous verrons, en effet, que cette propriété n'est pas toujours vraie.

Définition 4.5.1 *Nous dirons qu'une propriété est valable « presque partout » si celle-ci a lieu partout sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi par exemple, si f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E, on dira que $f = g$ presque partout (ou simplement* p.p.*) s'il existe une partie X de E telle que*

$$\mu(X) = 0, \quad f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in E \setminus X.$$

Proposition 4.5.1 *Si f est une fonction croissante sur l'intervalle $[a,b]$ alors f' existe presque partout.*

Proposition 4.5.2 *Si f est une fonction croissante sur $[a,b]$, alors f' est mesurable et on a*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Soit

$$f_n(x) = n\big(f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)\big)$$

où on a par convention $f(x + \frac{1}{n}) = f(b)$ si $x + \frac{1}{n} \geq b$. Donc f_n est mesurable pour tout n, et $f_n(x) \to f'(x)$ pour presque tout x. Donc f' est mesurable. Comme pour tout n, $f_n \geq 0$, on a par le lemme de Fatou et grâce à la croissance de f :

$$\begin{aligned}\int_a^b f' &= \int_a^b \lim f_n \\ &\leq \liminf \int_a^b f_n \\ &= \liminf \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \right) \\ &= f(b) - \limsup n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \\ &\leq f(b) - f(a).\end{aligned}$$

En effet, puisque f est croissante, on a pour tout n

$$n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \geq n f(a) \frac{1}{n} = f(a).$$

L'inégalité inverse se montre d'une manière analogue en considérant une suite

$$f_n(x) = n\Big(f(x) - f(x - \frac{1}{n})\Big). \qquad \square$$

Proposition 4.5.3 *Si f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^x f = 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $f = 0$* p.p.

Démonstration. Supposons que $\int_a^x f = 0$ pour tout x; alors $\int_c^d f = 0$ pour tout $c, d \in \,]a, b[$. Supposons maintenant que f est strictement positive sur un ensemble E de mesure strictement positive. Il existe alors un sous-ensemble fermé $F \subset E$ tel que $\mu(F) > 0$ et $\int_F f > 0$. Soit U l'ouvert $]a, b[\setminus F$ et écrivons U avec

$$U = \bigcup_i \,]a_i, b_i[\, .$$

Puisque $U \cup F = \,]a, b[$, on a

$$\int_U f = - \int_F f < 0.$$

Donc

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} f < 0.$$

On en déduit que $\int_{a_i}^{b_i} f \neq 0$ pour un intervalle $]a_i, b_i[$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. $\square$

Proposition 4.5.4 *Si f est bornée et mesurable sur $[a, b]$ et*

$$F(x) = \int_a^x f,$$

alors F est continue et $F(a) = 0$ et $F' = f$ presque partout.

Démonstration. Écrivons $f = f^+ - f^-$. On a

$$F(x) = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^- = F_1(x) - F_2(x),$$

où F_1, F_2 sont deux fonctions croissantes. D'après la proposition 4.5.2, $F'(x)$ existe pour presque tout x. De plus, si f est majorée par M, on a

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \le M\, |x_2 - x_1|;$$

donc F est continue. Soit

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) \\ &= n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f. \end{aligned}$$

Donc $|f_n(x)| \le M$ pour tout x et $f_n(x) \to F'(x)$ *p.p.* Par le théorème de la convergence dominée et la continuité de F,

$$\begin{aligned} \int_a^x F' &= \lim_n \int_a^x f_n \\ &= \lim_n \left(\int_a^x nF\left(t + \frac{1}{n}\right) dt - \int_a^x nF(t)\, dt \right) \\ &= \lim_n \left(\int_x^{x+\frac{1}{n}} nF(t)\, dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} nF(t)\, dt \right) \\ &= F(x) - F(a) \\ &= F(x) = \int_a^x f. \end{aligned}$$

En effet

$$n \int_x^{x+\frac{1}{n}} F(t)\, dt = \int_0^1 F(x + \frac{s}{n})\, ds.$$

Ainsi, par le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} n \int_x^{x+\frac{1}{n}} F(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 F(x + \frac{s}{n})\, ds = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{s}{n})\, ds = F(x).$$

Donc

$$\int_a^x (F' - f) = 0 \qquad \text{pour tout } x,$$

et donc $F' = f$ *p.p.* par la proposition 4.5.3. □

5

Mesure et intégration de Lebesgue dans le plan

Nous nous sommes limité jusqu'ici au cas de l'intégration sur la droite réelle. Nous voulons maintenant étendre les notions développées au plan $\mathbb{R}^2$. Ceci nous permettra de définir un produit de mesures de Lebesgue. Pour cela, nous commençons tout d'abord par examiner le cas typique du rectangle.

5.1 Intégration sur un rectangle

Nous appellerons rectangle tout produit $I \times J$ d'intervalles I, J de $\mathbb{R}$, ces intervalles pouvant être quelconques (ouverts, fermés ou mi-ouverts). Si R est le rectangle $I \times J$, nous appellerons $\alpha(R) = \ell(I)\,\ell(J)$ son aire.
Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^2$ et soit

$$\lambda(E) := \inf \Big\{ \sum_i \alpha(R_i);\ E \subset \bigcup_i R_i \Big\},$$

où $\{R_i\}$ est une famille dénombrable de rectangles. On appelle $\lambda(E)$ *mesure extérieure* ou, tout simplement, *mesure* de l'ensemble E. Nous pouvons alors obtenir des propriétés élémentaires similaires à celles de la mesure m.

Proposition 5.1.1
(i) $\lambda(\emptyset) = 0$*;*
(ii) $\lambda(E) = 0$ *pour tout ensemble dénombrable* E*;*
(iii) $\lambda(E) \geq 0$ *pour tout* E*;*
(iv) Si $E \subset F$*, alors* $\lambda(E) \leq \lambda(F)$*;*
(v) Si $\{E_i\}$ *est une famille dénombrable d'ensembles, alors*

$$\lambda\Big(\bigcup_i E_i\Big) \leq \sum_i \lambda(E_i).$$

Proposition 5.1.2 *Si* R *est un rectangle alors* $\lambda(R) = \alpha(R)$.

Démonstration. Supposons d'abord que R est un rectangle fermé. Puisque $\{R\}$ est un recouvrement de R, on a évidemment $\lambda(R) \leq \alpha(R)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\{C_k\}$ un recouvrement fini de R par des carrés *dyadiques* de même taille (*i.e.* de longueur de côté $1/2^k$), On suppose que ce recouvrement est tel que $\sum_k \alpha(C_k) < \lambda(R) + \varepsilon$. On peut aussi supposer que l'intersection de C_k avec R n'est pas vide. Puisque R est un rectangle, $R = I \times J$, les ensembles C_k consistent en tous les carrés $D_i \times E_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ où les D_i (*resp.* E_j) forment un recouvrement disjoint de I (*resp.* J). Donc

$$\bigcup_k C_k = \bigcup_{i,j} (D_i \times E_j) = \Big(\bigcup_i D_i\Big) \times \Big(\bigcup_j E_j\Big),$$

et

$$\begin{aligned} \lambda(R) + \varepsilon &> \sum_{i,j} \alpha(D_i \times E_j) \\ &= \sum_i \ell(D_i) \sum_j \ell(E_j) \\ &\geq \mu(I)\,\mu(J). \end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda(R) \leq \mu(I)\,\mu(J)$, on déduit que $\lambda(R) = \mu(I)\,\mu(J)$.
□

5.2 Mesurabilité dans le plan

Nous allons maintenant donner une définition de la mesurabilité correspondant au critère de Carathéodory.

Définition 5.2.1 *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est dit* mesurable *(au sens de Lebesgue) si*

$$\lambda(E \cap T) + \lambda(E^c \cap T) = \lambda(T)$$

pour tout ensemble T de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5.2.1 *L'ensemble E est mesurable si et seulement si*

$$\lambda(E \cap R) + \lambda(E^c \cap R) = \lambda(R)$$

pour tout rectangle R.

Proposition 5.2.2 *Les rectangles sont mesurables.*

Démonstration. Soit Q un rectangle quelconque. Montrons que Q partage tout rectangle R additivement. La figure 5.1 montre deux schémas possibles de décomposition de R.

Le rectangle R est l'union de $Q \cap R$ et d'au plus huit autres rectangles disjoints $S_1, \ldots, S_8$ dont l'aire totale est $\alpha(R)$.
Puisque $Q^c \cap R \subset S_1 \cup \ldots S_8$, on a

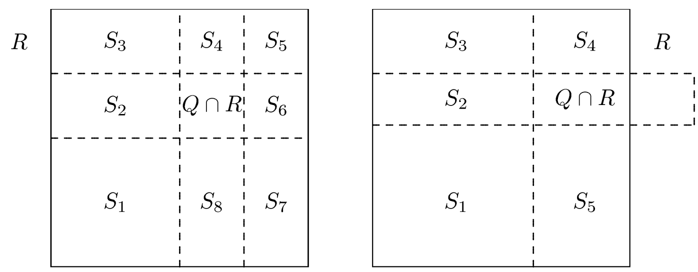

FIGURE 5.1. Schémas de décomposition d'un rectangle

$$\lambda(Q^c \cap R) \leq \alpha(S_1) + \cdots + \alpha(S_8).$$

Donc

$$\begin{aligned}\lambda(Q \cap R) + \lambda(Q^c \cap R) &\leq \alpha(Q \cap R) + \alpha(S_1) + \ldots \alpha(S_8) \\ &= \alpha(R) = \lambda(R).\end{aligned}$$

La seconde inégalité s'obtient par la sous-additivité. Donc Q sépare tout rectangle additivement et ainsi Q est mesurable. $\square$

Nous donnons maintenant quelques propriétés de la mesure λ qui sont analogues à celles de μ.

Proposition 5.2.3

(i) Si $\{E_i\}$ est une famille finie ou dénombrable d'ensembles mesurables et disjoints, alors

$$\lambda\Big(\bigcup_i E_i\Big) = \sum_i \lambda(E_i).$$

(ii) Si $E_1, \ldots, E_n$ sont mesurables, alors les ensembles $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ et $E_1 \cap \cdots \cap E_n$ sont mesurables ainsi que $E_1 \setminus E_2$.

(iii) Tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est union dénombrable de carrés ouverts ; donc les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^2$ sont mesurables.

5.3 Relation entre λ et μ

On se propose maintenant d'établir sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une relation entre la mesure λ et la mesure μ. Ceci nous permettra de construire des *produits de mesures* de Lebesgue.

Proposition 5.3.1 *Si E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$ de mesures finies, alors $\lambda(E \times F) \leq \mu(E)\,\mu(F)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soient $\{I_j\}$ et $\{J_k\}$ des recouvrements de E et F respectivement par intervalles, avec

$$\sum_j \ell(I_j) < \mu(E) + \varepsilon,$$
$$\sum_k \ell(J_k) < \mu(F) + \varepsilon.$$

Puisque $\{I_j \times J_k\}$ est un recouvrement de $E \times F$ par rectangles, on a

$$\begin{aligned}\lambda(E \times F) &\leq \sum_{j,k} \alpha(I_j \times J_k)\\ &= \sum_j \ell(I_j) \sum_k \ell(J_k)\\ &< (\mu(E) + \epsilon)\,(\mu(F) + \epsilon).\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et puisque $\mu(E)$ et $\mu(F)$ sont finis, alors $\lambda(E \times F) \leq \mu(E)\,\mu(F)$. $\square$

Proposition 5.3.2 *Si les ensembles E et F sont des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(E \times F) = \mu(E)\,\mu(F)$.*

Démonstration. Les ensembles E et F sont fermés et bornés ; ils sont donc mesurables (par rapport à la mesure μ) et ont des mesures finies. D'après la proposition 5.3.1, il suffit donc de montrer que $\lambda(E \times F) \geq \mu(E)\,\mu(F)$.
Puisque $E \times F$ est compact, on peut approcher $\lambda(E \times F)$ par l'aire totale de recouvrements finis de carrés dyadiques de mêmes tailles. Soit $\{S_{ij}\} = E_i \times D_j$ un tel recouvrement où les E_i et D_j sont des intervalles dyadiques de longueur $1/2^N$, et

$$\sum_{i,j} \alpha(S_{ij}) < \lambda(E \times F) + \varepsilon.$$

On peut supposer que $\{S_{ij}\}$ est l'ensemble de tous les carrés dyadiques de côté $1/2^N$ coupant $E \times F$, et donc que

$$\bigcup_{i,j} S_{ij} = D_1 \times (E_1 \cup \ldots E_m) \cup \ldots \cup D_n \times (E_1 \cup \ldots E_m),$$

où $\{D_1, \ldots, D_n\}$ est un recouvrement disjoint de E et $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un recouvrement disjoint de F. Donc

$$\begin{aligned}\lambda(E \times F) + \varepsilon &> \sum_{i,j} \alpha(S_{ij})\\ &= \sum_i \ell(D_i) \sum_j \ell(E_j)\\ &\geq \mu(E) \times \mu(F).\end{aligned}$$

Notons que l'utilisation de carrés dyadiques de même taille est nécessaire pour assurer un recouvrement fini de $E \times F$ de la forme $\{I_j \times J_k;\ j = 1 \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m\}$. $\square$

Proposition 5.3.3 *Si E et F sont des ensembles mesurables de $\mathbb{R}$, alors*

$$\lambda(E \times F) = \mu(E)\,\mu(F).$$

Proposition 5.3.4 *Si E et F sont des ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ alors $E \times F$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$.*

Proposition 5.3.5 *Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. Alors, on a l'identité :*

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \inf \Big\{ \sum_i \lambda(A_i \times B_i);\ E \subset \bigcup_i A_i \times B_i \Big\} \\ &= \inf \Big\{ \sum_i \mu(A_i)\,\mu(B_i);\ E \subset \bigcup_i A_i \times B_i \Big\}\end{aligned}$$

Démonstration. Soit

$$\lambda_m(E) = \inf \Big\{ \sum_i \lambda(A_i \times B_i);\ E \subset \bigcup_i A_i \times B_i \Big\}.$$

Puisque λ_m est une borne inférieure prise sur une classe plus grande de recouvrements que $\lambda(E)$, on a $\lambda_m(E) \le \lambda(E)$. Supposons d'abord que $E \subset [0,1[\times[0,1[$, on a en particulier $\lambda_m(E) < \infty$. Soit $\{A_i \times B_i\}$ un recouvrement de E par des produits mesurables, avec $A_i \subset [0,1[$ et $B_i \subset [0,1[$, et

$$\sum_i \mu(A_i)\,\mu(B_i) < \lambda_m(E) + \varepsilon.$$

Soit $\{I_{in}\}$ et $\{J_{im}\}$ des recouvrements par intervalles de A_i et B_i respectivement, avec

$$\begin{aligned}\sum_n \ell(I_{in}) &< \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}, \\ \sum_n \ell(J_{im}) &< \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.\end{aligned}$$

La famille dénombrable $\{I_{in} \times J_{im}\}$ est un recouvrement par rectangles de E. Donc puisque $\mu(A_i) \le 1$ et $\mu(B_i) \le 1$:

$$\begin{aligned}\lambda(E) &\le \sum_i \sum_n \sum_m \ell(I_{in})\,\ell(J_{im}) \\ &= \sum_i \Big(\sum_n \ell(I_{in})\Big)\Big(\sum_m \ell(J_{im})\Big) \\ &< \sum_i \Big(\mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\Big(\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) \\ &\le \sum_i \Big(\mu(A_i)\,\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} + \frac{\varepsilon}{2^i} + \frac{\varepsilon^2}{4^i}\Big) \\ &< \lambda_m(E) + 4\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $\lambda(E) \le \lambda_m(E)$ si $E \subset [0,1[\times[0,1[$. Ce résultat est généralisable au cas des ensembles E quelconques. $\square$

Nous allons maintenant montrer le lien entre la mesure dans le plan et la mesure sur la droite réelle à travers l'intégration. En particulier, on sait que pour des fonctions f ayant certaines propriétés, l'aire de la surface

$$S = \{(x, y);\ a \leq x \leq]a, b[\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est donnée par l'intégrale $\int_a^b f\,d\mu$. Nous allons faire le lien entre cette définition et celle de la mesure λ.

Proposition 5.3.6 *Si E est une partie mesurable du carré $[0,1] \times [0,1]$, la fonction f définie par $f(x) = \mu(E_x)$ est mesurable et*

$$\int_0^1 \mu(E_x)\,d\mu(x) = \lambda(E),$$

où

$$E_x = \{y;\ (x, y) \in E\}.$$

Remarque 5.3.1 *Les notions de mesurabilité et d'intégrabilité peuvent s'étendre sans peine à $\mathbb{R}^2$. On notera ainsi noter, pour une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$, son intégrale par*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,d\lambda(x, y).$$

Nous allons maintenant énoncer deux résultats importants de la théorie de l'intégration. Ils permettent de calculer des intégrales doubles (dans le plan) comme une composition de deux intégrales simples (dans $\mathbb{R}$).

Proposition 5.3.7 *(***Théorème de Tonelli***)*
Soit E et F deux parties mesurables de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction positive et mesurable définie sur $E \times F$. Alors

1. *Pour tout $x \in E$ la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est mesurable et de plus la fonction*
$$x \in E \mapsto \int_F f(x, y)\,dy$$
est mesurable.
2. *Pour tout $y \in F$ la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable et de plus la fonction*
$$y \in F \mapsto \int_E f(x, y)\,dx$$
est mesurable.
3. *On a*
$$\int_{E \times F} f(x, y)\,dy\,dx = \int_E \Big(\int_F f(x, y)\,dy \Big)\,dx = \int_F \Big(\int_E f(x, y)\,dx \Big)\,dy.$$

Proposition 5.3.8 *(***Théorème de Fubini***)*
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x définie par

$$f_x(y) = f(x, y) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f_x \, d\mu$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} F \, d\mu.$$

Démonstration. Notons d'abord que le résultat est valable pour les fonctions indicatrices grâce à la proposition 5.3.6. Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$ de mesure finie et soit $f(x, y) = a\mathbf{1}_E(x, y)$, $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} &f_x(y) = a\mathbf{1}_E(y), \\ &\int f_x(y) \, d\mu(y) = a\mu(E_x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Par la proposition 5.3.6, on déduit

$$\int a\mu(E_x) \, d\mu(x) = a\lambda(E). \tag{5.2}$$

En intégrant (5.1) et en utilisant (5.2), on a

$$\int \left(\int f_x(y) \, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int a\mu(E_x) \, d\mu(x) = a\lambda(E).$$

Ainsi, pour la fonction $f(x, y) = a\mathbf{1}_E(x, y)$, nous avons

$$\int \left(\int f(x, y) \, d\mu(y) \right) d\mu(x) = a\lambda(E) = \int f(x, y) \, d\lambda(x, y).$$

Soit maintenant f_1 et f_2 deux fonctions définies par $f_1 = a_1\mathbf{1}_{E_1}$, $f_2 = a_2\mathbf{1}_{E_2}$, où $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et E_1, E_2 sont deux ensembles mesurables de mesures finies. Soit $f = f_1 + f_2$. On a

$$\begin{aligned} \int f(x, y) \, d\lambda(x, y) &= \int (f_1 + f_2) \, d\lambda \\ &= \int f_1 \, d\lambda + \int f_2 \, d\lambda \\ &= \int \left(\int f_1(x, y) \, d\mu(y) \right) d\mu(x) + \int \left(\int f_2(x, y) \, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int \left(\int f_1(x, y) \, d\mu(y) + \int f_2(x, y) \, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int \left(\int (f_1(x, y) + f_2(x, y)) \, d\mu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Puisque toute fonction étagée s'écrit sous la forme

$$f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{E_i},$$

on en déduit, par linéarité, que le résultat est valable pour toute fonction étagée positive.
Soit maintenant f une fonction mesurable et positive sur $\mathbb{R}^2$. Il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées telle que $f_n \to f$ p.p. Par le théorème de la convergence monotone, on a

$$\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda.$$

Montrons que le second membre est alors fini. Pour tout x, la suite $(f_n(x, \cdot))$ est une suite croissante de fonctions étagées, et

$$(f_n)_x(y) = f_n(x,y) \to f_x(y) = f(x,y).$$

Donc

$$F_n(x) := \int f_n(x,y) \, d\mu(y) \to \int f(x,y) \, d\mu(y) = F(x).$$

Pour tout n, on a

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int f_n(x,y) \, d\mu(y) \\ &= \int \sum_i a_{ni} \mathbf{1}_{E_{ni}}(x,y) \, d\mu(y) \\ &= \sum_i a_{ni} \mu(E_{ni})_x. \end{aligned}$$

Par la proposition 5.3.6, on déduit que pour tout n, F_n est une fonction mesurable en x puisque $\mu(E_x)$ est mesurable si E l'est. Puisque $F_n(x)$ est croissante, alors F est croissante. Donc l'intégrale

$$\int f(x,y) \, d\mu(y)$$

est une fonction mesurable de x. Enfin, par le théorème de la convergence monotone, on a

$$\begin{aligned} \int f_n(x) \, d\mu(x) &= \int \left(\int f_n(x,y) \, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &\to \int F(x) \, d\mu(x) \\ &= \int \left(\int f(x,y) \, d\mu(y) \right) \, d\mu(x). \end{aligned}$$

Ainsi, par (5.2), nous obtenons le résultat désiré pour les fonctions f positives mesurables.
Si f n'est pas positive mais intégrable, le résultat est vrai pour les fonctions f^+ et f^- et donc pour f. $\square$

6

Les espaces L^p

6.1 Ensembles négligeables

Commençons tout d'abord par préciser quelques notations. Nous avons considéré jusqu'à maintenant la mesure de Lebesgue que nous avons noté μ sur $\mathbb{R}$ et λ sur $\mathbb{R}^2$. Remarquons qu'il est maintenant possible d'étendre cette notion à l'espace $\mathbb{R}^3$ et même à tout espace $\mathbb{R}^d$, où $d < \infty$. Pour toutes ces raisons, nous noterons dorénavant de la même manière cette mesure par μ si cela ne prête pas à confusion.
Soit f une fonction mesurable. Nous noterons son intégrale par

$$\int f = \int f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x).$$

Définition 6.1.1 *On dit qu'une partie N de $\mathbb{R}^d$ est μ–négligeable (ou négligeable) si elle est contenue dans un ensemble mesurable de mesure nulle.*

Une partie d'un ensemble négligeable est un ensemble négligeable. Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable.

Proposition 6.1.1 *Soit f une fonction mesurable positive. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\int f = 0$ est que f soit nulle presque partout.*

Démonstration. Nous montrons seulement que la condition est suffisante. Supposons que l'intégrale de f soit nulle. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $E_n = f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty])$. Montrons que l'ensemble E_n est négligeable. On a

$$\frac{1}{n} \mathbf{1}_{E_n} \leq f;$$

d'où

$$\frac{1}{n} \mu(E_n) \leq \int f.$$

Ainsi $\mu(E_n) = 0$. Soit maintenant $E = \bigcup_n E_n$, on a

$$\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n) = 0.$$

Ceci prouve que l'ensemble E est négligeable. Or E est l'ensemble de tous les points x vérifiant $f(x) \neq 0$. D'où le résultat. $\square$

Proposition 6.1.2 *Soit f une fonction mesurable positive. Si f est intégrable alors f est finie presque partout.*

6.2 L'espace L^1

Notons par $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ (ou simplement $\mathscr{F}$ l'espace de toutes les applications de X dans $\mathbb{R}$.

Lemme 6.2.1 *Le sous-ensemble $\mathscr{N}$ de $\mathscr{F}$ constitué des applications presque partout nulles est un sous-espace de $\mathscr{F}$.*

Démonstration. Soient f et f' deux applications de X dans $\mathbb{R}$ et soient N et N' deux parties de X telles que $f_{|(X\setminus N)}$ et $f_{|(X'\setminus N')}$ soient nulles. Alors la fonction $f+f'$ est nulle sur l'ensemble

$$(X \setminus N) \cap (X' \setminus N') = X \setminus (N \cup N').$$

Si les ensembles N et N' sont négligeables alors $N \cup N'$ l'est aussi. Ainsi la somme de deux fonctions de $\mathscr{N}$ appartient à $\mathscr{N}$. De a même manière, on montre que si $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{N}$ alors $af \in \mathscr{N}$. $\square$

La relation « f et g sont égales presque partout » est une relation d'équivalence dans l'espace $\mathscr{F}$ que l'on peut définir par

$$f \equiv g \Leftrightarrow f - g \in \mathscr{N}.$$

L'espace quotient $F = \mathscr{F}/\mathscr{N}$ est l'espace des classes de fonctions. On dira ainsi d'un élément de F que c'est une fonction *définie presque partout*.
On note par $L^1(X,\mu)$ ou $L^1(\mu)$ ou $L^1(X)$ le sous-espace de F constitué des classes qui contiennent (au moins) une fonction Lebesgue–intégrable. On appelle $L^1(X,\mu)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur X. Par abus de langage, on parle souvent d'espace des fonctions intégrables.
Si $f, g \in \mathscr{F}$ sont deux fonctions qui ont même classe dans F, les fonctions $|f|$ et $|g|$ sont égales presque partout. Si $\varphi \in F$ est une classe de fonctions, on définit sa valeur absolue $|\varphi|$ comme la classe de toutes les fonctions $|f|$, où f appartient à la classe φ. Si f et g sont deux fonctions intégrables et presque partout égales, on a $\int f = \int g$.

Proposition 6.2.1
(i) L'espace $L^1(\mu)$ des classes de fonctions intégrables sur X est un espace vectoriel réel.
(ii) L'application

$$\varphi \mapsto \int |\varphi|$$

est une norme sur $L^1(\mu)$. On pose

$$\|\varphi\|_1 := \int |\varphi|.$$

(iii) L'application

$$\varphi \mapsto \int \varphi$$

est une forme linéaire continue sur $L^1(\mu)$ et on a l'inégalité

$$\left| \int \varphi \right| \leq \|\varphi\|_1.$$

Démonstration.

(i) Déjà démontré.
(ii) Soient $\varphi, \psi \in L^1(\mu)$ et soient f et g deux représentants respectifs des classes φ et ψ. Soit en outre $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\int |f+g| \leq \int |f| + \int |g|, \quad \int |af| = |a| \int |f|.$$

On en déduit

$$\int |\varphi + \psi| \leq \int |\varphi| + \int |\psi|,$$
$$\int |a\varphi| = |a| \int |\varphi|.$$

On a de plus évidemment $\int |\varphi| = 0$ si $\varphi = 0$. Inversement, si $\int |f| = 0$, on a par la proposition 6.1.1 $f = 0$ p.p. donc $\varphi = 0$.
(iii) L'application $\varphi \mapsto \int \varphi$ est trivialement linéaire. On a de plus

$$\left| \int \varphi \right| \leq \int |\varphi| = \|\varphi\|_1. \qquad \square$$

Remarque 6.2.1 *On peut étendre sans peine cette théorie aux fonctions à valeurs complexes.*

Proposition 6.2.2 *(***Théorème de la convergence dominée***)*
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les hypothèses suivantes :
(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite notée $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.
(ii) Il existe une fonction intégrable g positive telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n.
Alors

1. $f \in L^1(\mu)$;
2. $\int |f - f_n| \to 0$ *quand* $n \to \infty$;
3. $\int f_n \to \int f$ *quand* $n \to \infty$.

Notons que l'hypothèse (i) dans la proposition précédente implique que la fonction f est définie presque partout.

Proposition 6.2.3 *L'espace vectoriel normé $L^1(\mu)$ est complet, i.e. c'est un espace de Banach.*

6.3 Inégalités de convexité

Lemme 6.3.1 *Soit* $\alpha \in [0,1]$. *Pour tous* $u, v \in [0,+\infty]$, *on a*

$$u^{\alpha} v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha) v.$$

Démonstration. L'inégalité est évidente si u et v est égale à 0 ou à $+\infty$. Dans le cas contraire, cette inégalité est équivalente à

$$\alpha \ln u + (1-\alpha) \ln v \leq \ln(\alpha u + (1-\alpha) v).$$

Cette inégalité exprime le fait que la fonction $-\log x$ est convexe ; ce qui est vrai puisque sa dérivée $-\frac{1}{x}$ est croissante. □

Définition 6.3.1 *On dit que deux réels* p *et* q *sont conjugués si* $p > 0$ *et* $q > 0$ *et si* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Notons que si p et q sont conjugués alors ils sont nécessairement > 1.

Proposition 6.3.1 *(***Inégalité de Hölder***)*
Soient p *et* q *deux nombres réels conjugués et soient* f *et* g *deux fonctions mesurables positives. On a*

$$\int fg \leq \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soient

$$A = \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\int g^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Le résultat est immédiat si $A = 0$ ou $B = 0$, car dans ce cas f (ou g) est nulle presque partout et les deux membres de l'inégalité sont nuls. L'inégalité est aussi immédiate si A ou B est infini.
Supposons maintenant que les nombres A et B sont finis et non nuls. Soit x un point de $\mathbb{R}^d$ et posons

$$u = \left(\frac{f(x)}{A} \right)^p, \quad v = \left(\frac{g(x)}{B} \right)^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}.$$

Le lemme 6.3.1 implique

$$\frac{f(x)}{A} \frac{g(x)}{B} \leq \frac{1}{p} \frac{f(x)^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{g(x)^q}{B^q},$$

d'où

$$\frac{1}{AB} \int fg \leq \frac{1}{pA^p} \int f^p + \frac{1}{qB^q} \int g^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où le résultat. □

Proposition 6.3.2 *(***Inégalité de Minkowski***)*
Soit $p \in]1, +\infty[$ *et soient* f *et* g *deux fonctions mesurables et positives. On a*

$$\left(\int (f+g)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Soit q le nombre réel conjugué de p. D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\int f(f+g)^{p-1} \leq \left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$
$$\int g(f+g)^{p-1} \leq \left(\int g^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En additionnant ces deux inégalités et en notant que $(p-1)q = p$, on obtient

$$\int (f+g)^p \leq \left(\left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On obtient alors l'inégalité de Minkowski si le membre de gauche est fini. Si celui-ci est infini, on a par convexité de la fonction $x \mapsto x^p$

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p).$$

Donc, l'une des deux intégrales $\int f^p$ ou $\int g^q$ est infinie et l'inégalité de Minkowski est encore valable. □

6.4 Les espaces L^p

Soit p un réel ≥ 1. Pour toute fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^d$, on définit le nombre

$$N_p(f) := \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient maintenant f et g deux fonctions mesurables et soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a < +\infty$, on a par les inégalités de Hölder et de Minkowski les propriétés :

1. Si $|f| \leq |g|$ alors $N_p(f) \leq N_p(g)$.
2. $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.
3. $N_p(af) = |a| N_p(f)$.
4. Si $p > 1$ et si q est le conjugué de p alors $N_1(fg) \leq N_p(f)\, N_q(g)$.

Nous voulons maintenant définir le nombre N_p pour $p = +\infty$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. On dit que $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est un *majorant essentiel* de f si on a

$$f(x) \leq M \qquad \text{pour presque tout } x.$$

On appelle *borne supérieure essentielle* de f la borne inférieure de l'ensemble des majorants essentiels de f.

Lemme 6.4.1 *La borne supérieure essentielle de f est un majorant essentiel de f. C'est le plus petit majorant essentiel de f.*

Démonstration. Notons B la borne supérieure essentielle de f et supposons $B \neq -\infty$. Pour tout entier $n > 0$, il existe un ensemble négligeable N_n tel que $f(x) \leq B + \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash N_n$. L'ensemble $N = \bigcup_{n \geq 1} N_n$ est négligeable et l'on a $f(x) \leq B$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash N$. Si $B = -\infty$ pour tout $n > 0$, il existe un ensemble négligeable N_n tel que $f(x) \leq -n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus N_n$, et on conclut de façon similaire. □

On note alors $N_\infty(f)$ la borne supérieure essentielle de $|f|$. On a alors les propriétés :

1. Si $|f| \leq |g|$ alors $N_\infty(f) \leq N_\infty(g)$.
2. $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
3. $N_\infty(af) = |a| N_\infty(f)$.
4. $N_1(fg) \leq N_1(f)\, N_\infty(g)$.

Définition 6.4.1 *Soit $p \in [1, +\infty]$. On désigne par $L^p(\mu)$ l'espace des classes de fonctions φ ayant au moins un représentant f vérifiant $N_p(f) < \infty$.*

Les propriétés (1)–(4) ci-dessus montrent donc que l'application

$$f \in L^p(\mu) \mapsto \begin{cases} \|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \operatorname{Sup\,ess}(f) & \text{si } p = +\infty, \end{cases}$$

est une norme sur l'espace $L^p(\mu)$. Ici $\operatorname{Sup\,ess}(f)$ désigne la borne supérieure essentielle de f.

Proposition 6.4.1 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\mu)$ est complet.*

6.5 L'espace L^2

Commençons par noter que le nombre 2 est le seul conjugué de lui-même. Soient maintenant $f, g \in L^2(\mu)$. On déduit de l'inégalité de Hölder que la fonction $|fg|$ est intégrable et on a

$$\int fg \leq \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons

$$(f \mid g) := \int fg.$$

Montrons que l'application

$$(f, g) \in L^2(\mu) \times L^2(\mu) \mapsto (f \mid g) \in \mathbb{R}$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\mu)$. On a d'abord $(f \mid f) \geq 0$. De plus, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} (f \mid g_1 + g_1) &= (f \mid g_1) + (f \mid g_2) \qquad && f,\, g_1,\, g_2 \in L^2(\mu), \\ (f \mid \lambda g) &= \lambda\, (f \mid g) && f,\, g \in L^2(\mu),\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a évidemment

$$(g \mid f) = (f \mid g) \qquad f,\, g \in L^2(\mu).$$

Enfin si $(f \mid f) = 0$ alors $f^2 = 0$ p.p. D'où $f = 0$ p.p.

Proposition 6.5.1 *(***Théorème de Fischer et Riesz***)*
L'espace $L^2(\mu)$, muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ est un espace de Hilbert.

Notons que la norme que nous avons définie sur $L^2(\mu)$ est précisément la norme associée à ce produit scalaire, *i.e.*

$$(f \mid f) = \|f\|_2^2.$$

7

Mesures quelconques

7.1 Mesures

Nous allons généraliser la notion de mesure en donnant quelques définitions axiomatiques. Rappelons tout d'abord que si E est un ensemble, l'ensemble $\mathscr{S}$ de parties de E est dit *tribu (ou σ–algèbre)* si :

(i) $E,\ \emptyset \in \mathscr{S}$;

(ii) Si $A \in \mathscr{S}$ alors $A^c \in \mathscr{S}$;

(iii) Si $A, B \in \mathscr{S}$ alors $A \cup B \in \mathscr{S}$, *i.e.* $\mathscr{S}$ est fermé pour l'union ;

(iv) Si $(A_i)_i \in \mathscr{S}$ alors $\bigcup_i A_i \in \mathscr{S}$.

Si E est un ensemble et $\mathscr{S}$ est une tribu sur E, on dit que le couple $(E, \mathscr{S})$ est un *espace mesurable*.

Définition 7.1.1 *Soit $(E, \mathscr{S})$ un espace mesurable. On appelle* mesure positive *sur $(E, \mathscr{S})$ toute application $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

$$\mu(\emptyset) = 0, \qquad \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

pour toute famille dénombrable d'ensembles (A_n) disjoints deux à deux. On appelle espace mesuré *le triplet $(E, \mathscr{S}, \mu)$. Dans la pratique, on dit aussi que μ est une mesure sur E.*

Ainsi, si $(E, \mathscr{S}, \mu)$ est un espace mesuré, on déduit les propriétés énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 7.1.1 *Soit $(E, \mathscr{S}, \mu)$ un espace mesuré. On a les propriétés :*

(i) Si $A, B \in \mathscr{S}$, on a

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B),$$
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) Si $A, B \in \mathscr{S}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(iii) Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une famille dénombrable d'ensembles de $\mathscr{S}$. On a

$$\mu\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(A_i).$$

Démonstration.

(i) Les ensembles $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont disjoints et on a

$$A = (A\cap B) \cup (A \setminus B).$$

Le résultat est donc une conséquence de (i). La deuxième identité est obtenue en utilisant la première et intervertissant A et B.

(ii) En effet

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

(iii) Posons $U_0 = \emptyset$ et soit pour $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} U_i &= A_1 \cup \cdots \cup A_i \\ B_i &= A_i \setminus U_{i-1} = U_i \setminus U_{i-1}. \end{aligned}$$

On a $B_i \subset A_i$. De plus, les ensembles (B_i) sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup_{i\geq 1} A_i.$$

D'où

$$\mu\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i\geq 1} B_i\Big) = \sum_{i\geq 1} \mu(B_i) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(A_i). \quad \square$$

Exemple 7.1.1 *Soit X un ensemble quelconque et soit, pour tout sous-ensemble E de X*

$$\nu(E) = \begin{cases} \textit{Card}\, E & \textit{si } E \textit{ est fini}, \\ +\infty & \textit{sinon}, \end{cases}$$

On peut alors montrer que ν est une mesure sur la tribu de toutes les parties de X. Cette mesure est appelée mesure de comptage *ou* mesure du cardinal.

7.2 Intégrale de fonctions mesurables positives

Soit $(X, \mathscr{S}, \mu)$ un espace mesuré et soit $u : X \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable étagée, finie et positive; notons $\{a_1, \ldots, a_n\}$ l'ensemble de ses valeurs et posons $A_i = u^{-1}(a_i)$ de sorte que

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

On définit l'intégrale de la fonction u par :

$$\int u = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i),$$

où on a posé, par convention, $0 \cdot (+\infty) = 0$. Soient u et v deux fonctions mesurables étagées et positives, on peut montrer les propriétés suivantes :
(i) Si $u \leq v$ alors

$$\int u \leq \int v.$$

(ii) Si λ est un réel ≥ 0, alors

$$\int \lambda u = \lambda \int u.$$

(iii)

$$\int (u+v) = \int u + \int v.$$

Définition 7.2.1 *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. On appelle* intégrale de *f le nombre positif défini par*

$$\int f = \sup \left(\int u \right),$$

où u parcourt l'ensemble des fonctions mesurables étagées positives telles que $u \leq f$.

Soit maintenant $E \in \mathscr{S}$ un ensemble mesurable. Pour toute fonction f mesurable positive définie sur E, on pose

$$\int_E f = \int f \, \mathbf{1}_E.$$

Lemme 7.2.1 *Soit $u : X \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable étagée. Pour tout ensemble $A \in \mathscr{S}$, on pose*

$$\nu(A) = \int_A u.$$

L'application $\nu : \mathscr{S} \to [0, +\infty]$ ainsi définie est une mesure sur $(X, \mathscr{S})$.

Soit maintenant $u = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$ la décomposition *canonique* de u. Pour $A \in \mathscr{S}$, on a, par définition

$$\nu(A) = \sum_i a_i \mu(A \cap A_i).$$

Théorème 7.2.1 *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Pour tout ensemble mesurable $E \in \mathscr{S}$, on pose*

$$\nu(E) = \int_E f.$$

L'application $\nu : \mathscr{S} \to [0, +\infty]$ ainsi définie est une mesure sur $(X, \mathscr{S})$. Pour toute fonction mesurable positive $g : X \to [0, +\infty]$, on a

$$\int g \, d\nu = \int f g \, d\mu.$$

8

Changement de variable

8.1 Introduction

Soit d un entier positif, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et ϕ un homéomorphisme de U sur V, *i.e.* une application bijective, continue ainsi que son application réciproque. Soit λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ restreinte à V. Pour toute partie E mesurable de U posons $\mu(E) = \lambda(\phi(E))$.

Lemme 8.1.1 *L'application μ définit une mesure sur U.*

Démonstration. On a évidemment $\mu(\emptyset) = \lambda(\phi(\emptyset)) = 0$. Soit maintenant une famille d'ensembles de U, (A_i) disjoints deux à deux. On a

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \lambda\left(\phi\left(\bigcup_i A_i\right)\right).$$

Or $\phi\left(\bigcup_i A_i\right)$ est une union disjointe d'ensembles de V. D'où le résultat. $\square$

Dans ce qui suit, nous supposons donnés les ouverts U et V et C^1–difféomorphisme ϕ de U sur V, *i.e.* une application bijective continûment dérivable ainsi que l'application réciproque.

Lemme 8.1.2 *Si E est un ensemble μ–négligeable contenu dans U, alors l'ensemble $\phi(E)$ est λ–négligeable.*

Proposition 8.1.1 *Il existe une fonction mesurable $h : U \to [0, +\infty]$, localement λ–intégrable telle que $d\mu = h\, d\lambda$.*

Corollaire 8.1.1 *Soit E un ensemble mesurable au sens de Lebesgue contenu dans U, l'ensemble $\phi(E)$ est mesurable au sens de Lebesgue et l'on a*

$$\lambda(\phi(E)) = \int_E h\, d\mu.$$

Démonstration. Si l'ensemble E est mesurable au sens de Lebesgue, il existe deux ensembles mesurables A et B contenus dans U tels que $A \subset E \subset B$ et que $\lambda(B \setminus A) = 0$. Donc $\phi(A) \subset \phi(E) \subset \phi(B)$ et par le lemme 8.1.2,

$$\lambda(\phi(B) \setminus \phi(A)) = \lambda(\phi(B \setminus A)) = 0.$$

On en déduit que l'ensemble $\phi(E)$ est mesurable au sens de Lebesgue et que

$$\lambda(\phi(E)) = \mu(A) = \mu(B) = \int_E h\, d\lambda. \qquad \square$$

Ce corollaire montre que l'application $E \mapsto \phi(E)$ établit une bijection entre les ensembles mesurables au sens de Lebesgue contenus dans U et les ensemble mesurables au sens de Lebesgue contenus dans V. En outre, on peut prolonger la mesure μ aux ensembles mesurables contenus dans U en posant

$$\mu(E) = \lambda(\phi(E)) = \int_E h\, d\lambda.$$

8.2 Le théorème du changement de variable

Notons l'application $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d)$. La matrice jacobienne de l'application ϕ en un point $x = (x_1, \ldots, x_d) \in U$ est la matrice des dérivées partielles :

$$J(\phi)(x) = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq d}.$$

Comme l'application ϕ est de classe C^1, la fonction $x \mapsto \det J(\phi)(x)$ est continue ; elle ne s'annule pas puisque ϕ est un difféomorphisme.

Proposition 8.2.1 *Soit E un ensemble mesurable au sens de Lebesgue contenu dans U. On a*

$$\lambda(\phi(E)) = \int_E |\det J(\phi)(x)|\, d\lambda(x).$$

Ainsi, la fonction $|\det J(\phi)(x)|$ est la fonction h du corollaire précédent. On notera qu'elle n'est pas seulement mesurable, elle est continue.

Corollaire 8.2.1 *Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue–intégrable. La fonction*

$$x \mapsto f(\phi(x))\, |\det J(\phi)(x)|$$

est Lebesgue–intégrable sur U et l'on a

$$\int_V f(y)\, d\lambda(y) = \int_U f(\phi(x))\, |\det J(\phi)(x)|\, d\lambda(x).$$

8.3 Coordonnées polaires

On prend, dans ce paragraphe, $d = 2$.

Proposition 8.3.1 *Soit $f(x, y)$ une fonction Lebesgue–intégrable dans le disque D de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

La fonction

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est Lebesgue–intégrable dans le rectangle

$$A = \{(r, \theta);\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

et l'on a

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Démonstration. Soit A' le rectangle ouvert $]0, 2\pi[\times]0, R[$ et D' le complémentaire dans D du segment $[0, R]$ de l'axe horizontal $y = 0$. L'application $\phi : A \to D$ définie par $\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ induit un C^1–difféomorphisme de A' sur D'. Sa matrice jacobienne est

$$J(\phi)(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et $J(\phi)(r, \theta) = r$. Par le théorème du changement de variable, on a

$$\int_{D'} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{A'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

On obtient le résultat en remarquant que les ensembles $D \setminus D'$ et $A \setminus A'$ sont négligeables. $\square$

8.4 Mesure sur la sphère

Soit d un entier ≥ 0. Pour tout point $x = (x_1, \dots, x_{d+1})$ de $\mathbb{R}^{d+1}$, posons $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2)^{\frac{1}{2}}$. La boule unité B_{d+1} de $\mathbb{R}^{d+1}$ est l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^{d+1}$ tels que $\|x\| \le 1$ et la sphère unité S_d est l'ensemble des points x tels que $\|x\| = 1$.
Pour toute partie A de S_d, on note $C(A)$ l'ensemble des points $x = rs$ de $\mathbb{R}^{d+1}$, où $0 < r \le 1$ et $s \in A$. Si A est un ouvert dans S_d, l'ensemble $C(A)$ est ouvert dans B_{d+1}. Donc, une partie A de S_d est mesurable si et seulement si l'ensemble $C(A)$ est mesurable.
On définit sur S_d la mesure σ_d par

$$\sigma_d(A) = (d + 1)\lambda_{d+1}(C(A))$$

pour toute partie mesurable A de S_d. Soient A un ensemble mesurable de S_d et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a \le b$. On en déduit que si b_d est la mesure de Lebesgue de la boule unité B_{d+1} de $\mathbb{R}^{d+1}$ alors

$$\sigma_d(S_d) = (d + 1)\, b_{d+1}.$$

Proposition 8.4.1 *Soit f une fonction Lebesgue–intégrable sur $\mathbb{R}^d$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} f \, d\lambda_{d+1} = \int_{]0,+\infty[\, \times S_d} f(rs)\, r^d \, d\lambda(r)\, d\sigma_d(s).$$

Corollaire 8.4.1 *Soit $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = F(\|x\|)$. Si F est mesurable et positive il en est de même pour f et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x)\, dx = (d+1) b_{d+1} \int_0^{+\infty} F(r)\, r^d \, dr$$

où b_{d+1} est la mesure de Lebesgue de la boule unité B_{d+1} de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Références

1. H.S. BEAR, *A primer of Lebesgue integration*, Academic Press, New York (1995).
2. H. BUCHWALTER, *Le calcul intégral*, Ellipses, Paris (1991).
3. C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, Paris (1990).
4. A. GRAMAIN, *Intégration*, Hermann, Paris (1988).
5. S. LANG, *Analysis II*, Addison–Wesley, Reading (1969).
6. F. LAUDENBACH, *Calcul différentiel et intégral*, Les éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau (2000).
7. D. REVUZ, *Mesure et intégration*, Hermann, Paris (1994).
8. D.W. STROOCK, *A concise introduction to the theory of integration*, Birkhäuser, Bâle (1999).