POLYTECH
CLERMONT-FERRAND

Génie Mathématique et Modélisation
4ère année

Compléments d'Analyse Fonctionnelle

Rachid Touzani

Octobre 2019

Table des matières

1

Préliminaires

Considérons la modélisation d'un problème en mécanique des structures : celui de l'équilibre d'une barre élastique. On peut écrire le problème sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(EA\dfrac{du}{dx}\Big) = f \qquad \text{dans }]0, L[, \\ u(0) = 0, \\ E(L)A(L)\dfrac{du}{dx}(L) = p. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ici L désigne la longueur de la barre, E et A désignent respectivement son coefficient d'élasticité et sa section en chaque point. La barre est supposée soumise à une force selon son axe de densité f et à une force en son extrémité $x = L$, égale à p. Elle est en outre fixée en son extrémité $x = 0$. La fonction inconnue u désigne le déplacement en chaque point de la barre à partir d'une position de référence.
Si on suppose que les fonctions données f, E et A sont assez régulières. Par exemple, si f est continue, E et A sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient

$$E(x) \geq E_m > 0, \quad A(x) \geq A_m > 0 \quad 0 \leq x \leq L,$$

alors le problème (1.1) admet une solution unique u de classe $\mathcal{C}^2$.
Supposons maintenant que la barre soit composée de deux matériaux de propriétés élastiques différentes. On suppose par exemple que la fonction E est donnée par

$$E(x) = \begin{cases} E_1 & \text{si } 0 < x < a, \\ E_2 & \text{si } a \leq x < L, \end{cases}$$

où $0 < a < L$. Dans ce cas, l'équation donnée dans (1.1) n'a pas de sens *a priori*. On peut toutefois lui donner un sens en écrivant

$$\begin{aligned} -E_1\frac{d}{dx}\Big(A\frac{du}{dx}\Big) &= f \qquad \text{dans }]0, a[, \\ -E_2\frac{d}{dx}\Big(A\frac{du}{dx}\Big) &= f \qquad \text{dans }]a, L[. \end{aligned}$$

En utilisant des principes de la mécanique, on peut imposer en plus que la fonction u est continue en $x = a$, *i.e.*

$$u(a_-) = u(a_+),$$

où

$$v(a_\pm) := \lim_{\varepsilon \to 0} v(a \pm \varepsilon).$$

De plus, il semble raisonnable d'imposer que la contrainte en $x = a$ est continue, *i.e.*

$$E_1 A(a) \frac{du}{dx}(a_-) = E_2 A(a) \frac{du}{dx}(a_+)$$

On peut ainsi, dans ce cas, donner le sens suivant au problème (1.1) :

$$\begin{cases} -E_1 \dfrac{d}{dx}\Big(A \dfrac{du}{dx}\Big) = f & \text{dans }]0, a[, \\ -E_2 \dfrac{d}{dx}\Big(A \dfrac{du}{dx}\Big) = f & \text{dans }]a, L[, \\ u(a_-) = u(a_+), \\ E_1 A(a) \dfrac{du}{dx}(a_-) = E_2 A(a) \dfrac{du}{dx}(a_+), \\ u(0) = 0, \\ E_2 A(L) \dfrac{du}{dx}(L) = p. \end{cases} \tag{1.2}$$

Prenons l'exemple $f = 0$ et d'une section constante A. On obtient :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0 & \text{dans }]0, a[, \\ -\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0 & \text{dans }]a, L[, \\ u(a_-) = u(a_+), \\ E_1 \dfrac{du}{dx}(a_-) = E_2 \dfrac{du}{dx}(a_+), \\ u(0) = 0, \\ E_2 A \dfrac{du}{dx}(L) = p. \end{cases} \tag{1.3}$$

La solution du (1.3) est donnée par :

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{E_1 A} x & \text{si } 0 \le x \le a, \\ \dfrac{p}{E_2 A}(x - a) + \dfrac{pa}{E_1 A} & \text{si } a \le x \le L. \end{cases}$$

La théorie des distributions permet de définir un cadre fonctionnel donnant un sens au problème (1.1) dans ces conditions.

2

Introduction à la théorie des distributions

2.1 Fonctions tests

Dans tout ce qui suit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On utilisera la notation des multi-entiers de SCHWARTZ, *i.e.*, pour tout multi-entier $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ on note par ∂^α l'opérateur différentiel :

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \qquad \text{où } |\alpha| := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i.$$

Exemple 2.1.1 *Prenons le cas $N = 2$, $\alpha = (2,1)$. Ainsi $|\alpha| = 3$. Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^3, on a ainsi*

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}.$$

Définition 2.1.1 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On appelle support de f, et on note $\operatorname{supp} f$, la fermeture de l'ensemble $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$.*

Nous rappelons que pour $p \in [1, +\infty[$, l'espace $L^p(\Omega)$ est celui des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables telles que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < +\infty.$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue. Par ailleurs, nous désignons par $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur tout ensemble compact de Ω.

Proposition 2.1.1 *(Formule de Taylor)*
Soit $a \in \mathbb{R}^N$ et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de a. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout x dans un voisinage de a, on a

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} (x-a)^\alpha \partial^\alpha \varphi(a) + \int_0^1 (1-t)^k \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{k+1}{\alpha!} (x-a)^\alpha \partial^\alpha \varphi(a + t(x-a)) \, dt,$$

où $\alpha! = (\alpha_1!)\,(\alpha_2!)\,\dots(\alpha_N!)$ et $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_1} \dots y_N^{\alpha_N}$.

Exemple 2.1.2 *Prenons le cas $N = 2$ et $k = 1$. On obtient la formule :*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(a) + (x_1 - a_1)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(a) \\ &\quad + 2(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(a + t(x-a)) \\ &\quad + (x_1 - a_1)^2 \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(a + t(x-a))\, dt \\ &\quad + (x_2 - a_2)^2 \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(a + t(x-a))\, dt.\end{aligned}$$

On note par $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et dont le support est un borné de $\mathbb{R}^N$. Dans la littérature, on note aussi cet espace quelque fois $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
On appelle $\mathscr{D}(\Omega)$ espace des fonctions tests sur Ω.

Exemples

1. Soit $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ et soit
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$
Alors $\widetilde{f} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.
2. Pour $N = 1$, soit la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{1-x^2}\Big) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$
On a $\operatorname{supp} f = [-1, 1]$ et cet ensemble est un compact de $\mathbb{R}$. Il est facile de voir que f est indéfiniment dérivable pour $|x| > 1$ et pour $|x| < 1$. En examinant la série de Taylor autour de $x = \pm 1$, on montre aisément que toutes les dérivées de f sont nulles.
3. Pour N quelconque, la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\Big) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$
où $|x|$ est la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^N$, est dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 2.1.1 *L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est une algèbre sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. En effet*

1. *Si $f_1, f_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ alors $f_1 + f_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ car*
$$\operatorname{supp}(f_1 + f_2) \subset \operatorname{supp} f_1 \cup \operatorname{supp} f_2.$$
2. *Si $f_1 \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $f_1 f_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ car*
$$\operatorname{supp}(f_1 f_2) \subset \operatorname{supp} f_1 \cap \operatorname{supp} f_2.$$

Définition 2.1.2 *On dira qu'une suite (f_n) de $\mathscr{D}(\Omega)$ converge vers f dans $\mathscr{D}(\Omega)$ si $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ et si*

i– il existe un compact K de Ω tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} f_n \subset K$;

ii– la suite $(\partial^\alpha f_n)$ converge uniformément vers $\partial^\alpha f$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

2.2 Distributions

Nous commençons par leur définition.

Définition 2.2.1 *On appelle* distribution *sur Ω toute forme linéaire "continue" sur $\mathscr{D}(\Omega)$, i.e., toute application*

$$T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

vérifiant :

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) \qquad && \forall\, f, g \in \mathscr{D}(\Omega), \\ T(\lambda f) &= \lambda T(f) && \forall\, f \in \mathscr{D}(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La continuité ici est au sens suivant : si (φ_n) est une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$ convergeant vers φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ alors la suite de réels $(T(\varphi_n))$ converge vers $T(\varphi)$.

Proposition 2.2.1 *Soit $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On suppose qu'il existe une constante C telle que*

$$|T(\varphi)| \le C \sup_{\substack{x\in\Omega \\ \alpha\in\mathbb{N}^N}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{2.1}$$

Alors T est une distribution sur Ω.

Démonstration. Par linéarité de l'application T il suffit de montrer que si (φ_n) est une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$ convergeant vers zéro alors la suite $(T(\varphi_n))$ converge vers zéro. Or si l'application T vérifie (2.1) on a

$$|T(\varphi_n)| \le C \sup_{\substack{x\in\Omega \\ \alpha\in\mathbb{N}^N}} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat. □

On introduit l'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ des distributions comme étant l'espace dual de $\mathscr{D}(\Omega)$. On définit ensuite la convergence des distributions de la façon suivante :

Définition 2.2.2 *On dit qu'une suite (T_n) de $\mathscr{D}'(\Omega)$ converge vers T dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et si la suite de réels $(T_n(\varphi))$ converge vers $T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.*

On note aussi parfois $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$, où le crochet $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\mathscr{D}(\Omega)$.

Exemple 2.2.1 *Soit a un point de Ω ; on définit* la masse de Dirac δ_a *en a par :*

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a) \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Il est clair que cela définit δ_a comme une distribution sur Ω. En effet, on a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| \le \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \le \sup_{\substack{x\in\Omega \\ \alpha\in\mathbb{N}^N}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Théorème 2.2.1 *L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

A toute fonction f de $L^2(\Omega)$ on associe la distribution T_f sur Ω définie par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Notons que l'application

$$f \in L^2(\Omega) \mapsto T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

est injective. En effet, soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $T_f = 0$, $i.e.$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Le théorème 2.2.1 implique :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

Donc $f = 0$ presque partout. La linéarité de l'application $f \mapsto T_f$ implique que si $T_f = T_g$ alors $f = g$ presque partout. On peut donc identifier f et T_f, $i.e.$, on peut identifier $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Dans la suite, on fera cette identification en notant abusivement $L^2(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$.
De la même façon, on pourra identifier $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

2.3 Dérivée d'une distribution

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $1 \leq i \leq N$. L'application

$$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \mapsto -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \in \mathbb{R}$$

définit une distribution appelée $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle au sens des distributions. On la note $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$.
Soit maintenant f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On veut calculer le $i$ème dérivée partielle au sens des distributions de T_f. On a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $1 \leq i \leq N$:

$$\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx.$$

D'autre part, par intégration par parties, on a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$:

$$\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx.$$

On en déduit que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la dérivée classique de f coïncide avec la dérivée au sens des distributions.

D'une manière générale, soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multi-entier quelconque. On définit la dérivée au sens des distributions $\partial^\alpha T$ par

$$\langle\, \partial^\alpha T,\, \varphi \,\rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle\, T,\, \partial^\alpha \varphi \,\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Donc, une distribution sur Ω est indéfiniment dérivable au sens des distributions.

Proposition 2.3.1 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ l'application*

$$T \in \mathscr{D}'(\Omega) \mapsto \partial^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

est continue.

Démonstration. Soit (T_n) une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$ convergeant vers T dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et soit φ un élément de $\mathscr{D}(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}\langle\, \partial^\alpha T_n,\, \varphi \,\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle\, T_n,\, \partial^\alpha \varphi \,\rangle \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (-1)^{|\alpha|} \langle\, T,\, \partial^\alpha \varphi \,\rangle \\ &= \langle\, \partial^\alpha T,\, \varphi \,\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *Soit f la fonction de Heaviside, i.e.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0, \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

La fonction f n'est pas dérivable en 0 ; elle n'est même pas continue en ce point. Calculons sa dérivée au sens des distributions. On a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle\, f',\, \varphi \,\rangle = -\langle\, f,\, \varphi' \,\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'\, dx = \varphi(0) = \langle\, \delta_0,\, \varphi \,\rangle.$$

Notons qu'on retrouve le fait que $f'(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$.

Exemple 2.3.2 *Soit, dans $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = \frac{1}{2}|x|$. Calculons f'' au sens des distributions : On a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:*

$$\begin{aligned}\langle\, f'',\, \varphi \,\rangle &= \langle\, f,\, \varphi'' \,\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x|\varphi''\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x\varphi''\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\varphi''\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \varphi'\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \varphi'\, dx \\ &= \varphi(0) = \langle\, \delta_0,\, \varphi \,\rangle.\end{aligned}$$

2.4 Support d'une distribution

Nous commençons par admettre le résultat suivant.

Proposition 2.4.1 *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de Ω tel que $T|_{U_i} = 0$ pour tout $i \in I$. Alors $T = 0$.*

Soit maintenant $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et soit l'ensemble

$$A = \{x \in \Omega;\ \text{il existe un voisinage ouvert } U \text{ de } x \text{ avec } T|_U = 0\}.$$

Clairement A est le plus grand ouvert contenu dans Ω tel que $T|_A = 0$. On appelle *support de* T le complément de cet ouvert dans Ω. On vérifie aisément les propriétés suivantes :

1. Si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ alors le support de f en tant que distribution coïncide avec son support en tant que fonction.
2. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ alors le support de f en tant que distribution coïncide avec son support essentiel. Rappelons que, par définition, $f = 0$ presque partout en dehors du suport essentiel.
3. $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

Proposition 2.4.2 *On a*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}(T_1 + T_2) \subset \operatorname{supp} T_1 \cup \operatorname{supp} T_2 && \forall\, T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\Omega),\\
&\operatorname{supp}(\alpha T) \subset \operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} T && \forall\, T \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \forall\, \alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\\
&\operatorname{supp} \frac{\partial T}{\partial x_i} \subset \operatorname{supp} T && \forall\, T \in \mathscr{D}'(\Omega).
\end{aligned}$$

Démonstration. Montrons par exemple la première propriété, les autres propriétés se démontrant d'une manière analogue. Soit $x \notin \operatorname{supp} T_1 \cup \operatorname{supp} T_2$, *i.e.*, $x \notin \operatorname{supp} T_1$ et $x \notin \operatorname{supp} T_2$. On en déduit qu'il existe deux voisinages U et V de x tels que $T_1|_U = 0$ et $T_2|_V = 0$. Soit $W = U \cap V$; W est aussi voisinage de x. Soit encore $\varphi \in \mathscr{D}(W)$ qu'on prolonge par zéro à $U \cup V$. On a donc

$$\langle\, T_1 + T_2,\, \varphi\,\rangle = \langle\, T_1,\, \varphi\,\rangle + \langle\, T_2,\, \varphi\,\rangle = 0.$$

Donc $x \notin \operatorname{supp}(T_1 + T_2)$. $\square$

3

Espaces de Sobolev

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$. Commençons par rappeler quelques propriétés des espaces L^p.

3.1 Quelques rappels sur les espaces L^p

Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f telles que :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty && 1 \leq p < +\infty, \\ &\operatorname{Sup\,ess}_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty && p = +\infty; \end{aligned}$$

l'intégrale ci–dessus étant au sens de la mesure de Lebesgue. Cet espace, muni de la norme :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &:= \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} && 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &:= \operatorname{Sup\,ess}_{x \in \Omega} |f(x)| && p = +\infty, \end{aligned}$$

est un espace de Banach. De plus, pour $p = 2$, c'est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire :

$$(f, g) := \int_\Omega f(x) g(x) \, dx.$$

Nous énonçons ci–dessous quelques propriétés de ces espaces :

1. *Inégalité de Hölder* : Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a de plus
$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \, \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$
2. *Inégalité du triangle (Minkowski)* : On a pour tous $f, g \in L^p(\Omega)$:
$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

3. *Théorème de Riesz* : L'espace dual de $L^p(\Omega)$ peut être identifié à $L^q(\Omega)$ où $1/p+1/q = 1$ pour $1 \leq p < +\infty$. Le résultat est faux si $p = +\infty$ ($q = 1$). On a donc :

$$\begin{aligned}
(L^p(\Omega))' &= L^q(\Omega) \qquad \text{si } 1 < p < +\infty,\\
\big(L^2(\Omega)\big)' &= L^2(\Omega),\\
\big(L^1(\Omega)\big)' &= L^\infty(\Omega),\\
(L^\infty(\Omega))' &\supsetneqq L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

4. Soit $p \in [1, +\infty[$. Les fonctions constantes par morceaux ainsi que les fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$ sont denses dans $L^p(\Omega)$. Le résultat est faux si $p = +\infty$.

Définition 3.1.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. On dit que (f_n) converge (fortement) vers f si $f \in L^p(\Omega)$ et si*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

On note alors

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \qquad \textit{dans } L^p(\Omega).$$

Définition 3.1.2 *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. On dit que (f_n) converge faiblement vers f si $f \in L^p(\Omega)$ et si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\,\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\,\varphi \in L^q(\Omega),$$

avec $1/p + 1/q = 1$. On note alors

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \textit{dans } L^p(\Omega).$$

Définition 3.1.3 *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^\infty(\Omega)$. On dit que (f_n) converge faible $\star$ vers f si $f \in L^\infty(\Omega)$ et si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\,\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\,\varphi \in L^1(\Omega).$$

On note alors

$$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \qquad \textit{dans } L^\infty(\Omega).$$

Théorème 3.1.1 *Soit $p \in]1, +\infty[$. Alors, de toute suite bornée de $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous–suite convergeant faiblement dans $L^p(\Omega)$.*

3.2 Espaces de Sobolev

On se donne toujours un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et un réel $p \in [1, +\infty]$. On appelle $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ 1 \le i \le N \Big\}.$$

Ci–dessus, les dérivées partielles sont au sens des distributions. On note

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^N} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On note pour $p = 2$

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

Remarque 3.2.1 *On peut aussi définir $W^{1,p}(\Omega)$ de la manière suivante :*

$$W^{1,p}(\Omega) := \big\{ u \in L^p(\Omega);\ \exists f \in L^p(\Omega)^N \text{ avec } \int_\Omega u \, \nabla \cdot \varphi \, dx = -\int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^N \big\}.$$

En effet, l'identité

$$\int_\Omega u \, \nabla \cdot \varphi \, dx = -\int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^N$$

est équivalente à dire que $f = \nabla u$ au sens des distributions.

Remarque 3.2.2 *Il est clair que si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ et si $\nabla u \in L^p(\Omega)^N$ (ici ∇u est le gradient usuel de u), alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Exemple 3.2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors u est dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$. De plus, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est continue pour tout $i = 1, \ldots, N$. Donc $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$. Ainsi $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Exemple 3.2.2 *Soit dans $\mathbb{R}$, $\Omega =]-1, 1[$. La fonction $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \le p \le +\infty$. En effet, il est clair que $u \in L^p(\Omega)$ pour $1 \le p \le +\infty$. De plus, soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a :*

$$\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)\, dx = \int_0^1 x\varphi'(x)\, dx = -\int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

On en déduit que la dérivée au sens des distributions de u est la fonction de Heaviside. Cette fonction est évidemment dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \le p \le +\infty$.

Exemple 3.2.3 *Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| < 1\}$ et $u(x) = |x|^{-\frac{1}{3}}$. On a*

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p(\Omega)} &:= \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{-\frac{p}{3}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\
&= 4\pi \int_0^1 r^{2-\frac{p}{3}} \, dr.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} < +\infty \textit{ si et seulement si } p < 9.$$

De plus

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \frac{1}{3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{-\frac{4p}{3}} r^2 \,dr\,d\varphi\,d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3}\int_0^1 r^{2-\frac{4p}{3}}\,dr.\end{aligned}$$

Donc

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \textit{ pour tout } p < \frac{9}{4}.$$

En particulier $u \in H^1(\Omega)$.

Proposition 3.2.1 *Soit* $u \in W^{1,p}(]a,b[)$, $1 \le p \le +\infty$. *Alors il existe* $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^0([a,b])$ *tel que* $u = \widetilde{u}$ *presque partout et*

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt \qquad \forall\, x, y \in [a,b].$$

Démonstration. Nous faisons la démonstration en deux étapes :
(i) Soit y_0 fixé dans $]a,b[$ et notons :

$$v(x) = \int_{y_0}^x u'(t)\,dt, \qquad x \in]a,b[.$$

Montrons que $v \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et que

$$\int_a^b v(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b u'(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[).$$

$i.e.$, $v' = u'$ au sens des distributions.
On a pour $\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$:

$$\begin{aligned}\int_a^b v(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_a^b \left(\int_{y_0}^x u'(t)\,dt\right)\varphi'(x)\,dx \\ &= \int_a^{y_0}\int_{y_0}^x u'(t)\varphi'(x)\,dt\,dx + \int_{y_0}^b\int_{y_0}^x u'(t)\varphi'(x)\,dt\,dx\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b v(x)\varphi'(x)\,dx &= -\int_a^{y_0} u'(t)\left(\int_a^t \varphi'(x)\,dx\right)dt + \int_{y_0}^b u'(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)\,dx\right)dt \\ &= -\int_a^{y_0} u'(t)\varphi(t)\,dt + \int_{y_0}^b u'(t)(-\varphi(t))\,dt \\ &= -\int_a^b u'(t)\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

En outre, si $x \geq y$, on a :

$$\begin{aligned}|v(x) - v(y)| &\leq \int_y^x |u'(t)|\,dt \\ &\leq \left(\int_y^x |u'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_y^x 1^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq |x-y|^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p(a,b)}\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Cette inégalité, vraie pour $1 < p < +\infty$, assure la continuité de v.
Pour $p = 1$, puisque $u' \in L^1(a,b)$, en faisant tendre y vers x dans l'inégalité

$$|v(x) - v(y)| \leq \int_y^x |u'(t)|\,dt$$

on a $v(y) \to v(x)$; ce qui implique la continuité.
Nous omettrons de démontrer le résultat pour $p = +\infty$.
(ii) On a donc :

$$\int_a^b (v-u)\varphi'\,dx = 0 \qquad \forall\,\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$$

car $u \in W^{1,p}(]a,b[)$ donc

$$\int_a^b u\varphi'\,dx = -\int_a^b u'\varphi\,dx.$$

Ceci montre que $v' = u'$ au sens des distributions. Donc $v - u$ est constante presque partout. Puisque v est continue, la fonction $\widetilde{u} = v + \text{Const.}$ satisfait les conclusions de la proposition.
$\square$

Nous avons donc montré que $W^{1,p}(]a,b[) \subset \mathcal{C}^0([a,b])$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Ce résultat est un cas particulier des injections de Sobolev.

Théorème 3.2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière "suffisamment régulière".*

1. *Si $1 \leq p < N$, alors on a l'injection continue :*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \forall\,q \in [1,p^*] \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

De plus, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1,p^*)$, (i.e., tout borné de $W^{1,p}(\Omega)$ est d'adhérence compacte dans $L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < p^*$).

2. *Si $p = N$, alors*

$$W^{1,N}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \forall\,q \in [1,\infty),$$

avec injection continue. De plus, l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < +\infty$ est compacte.

3. *Si $p > N$, alors*
$$W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}).$$
De plus, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est compacte. En particulier, dans tous les cas ($1 \leq p \leq \infty$), l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte.

Remarque 3.2.3 *Dans le cas unidimensionnel ($N = 1$), le résultat (ii) implique que $W^{1,1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection continue, pour tout $1 \leq q < \infty$ et que cette injection est compacte pour tout $1 \leq q < +\infty$. En outre, le résultat (iii) implique que*
$$W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \qquad \text{pour } 1 < p \leq +\infty.$$
On retrouve donc la proposition précédente.

Corollaire 3.2.1 *Soit $1 \leq p < +\infty$ et soit (u_n) une suite de fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$. Alors $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$.*
Pour $p = +\infty$, si $u_n \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ alors $u_n \to u$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Définition 3.2.1 *Pour $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. D'une manière analogue, on note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Théorème 3.2.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$. On a la caractérisation (pour $1 \leq p < +\infty$) :*
$$W_0^{1,p}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$
Notons que, pour $p \leq N$, l'écriture $u = 0$ sur $\partial\Omega$ n'a a priori *pas de sens puisque les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ ne sont pas continues.*

3.3 Les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$

Nous consacrons ce paragraphe aux espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. On munit l'espace de Banach $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :
$$(u,v)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega \Big(uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\,dx = \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\,dx$$
et de la norme associée :
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \Big(\int_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2\right)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}.$$

Théorème 3.3.1 *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini ci-dessus.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot\,.\,\cdot)_{H^1(\Omega)}$ est complet.
Soit (v_n) une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Puisque $L^2(\Omega)$ est complet, il existe des fonctions $v, v_i \in L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$, telles que :

$$\begin{aligned} v_n &\to v && \text{dans } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &\to v_i && \text{dans } L^2(\Omega),\ 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que $v_i = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ au sens des distributions. Puisque l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ est continue, on a donc lorsque $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} v_n &\to v && \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega), \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &\to v_i && \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega),\ 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega),\ 1 \leq i \leq N.$$

Par l'unicité de la limite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, on conclut que :

$$v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega),\ 1 \leq i \leq N.$$

Donc $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$. D'où $v \in H^1(\Omega)$. $\square$

Bien entendu, $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. C'est donc aussi un espace de Hilbert.

Théorème 3.3.2 (Inégalité de Poincaré) *Si Ω est borné, il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que :*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. Nous montrons d'abord ce résultat pour des fonctions $v \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Soit $\widetilde{v}$ le prolongement de v par zéro en dehors de Ω. Puisque Ω est borné, on peut supposer que le domaine Ω est contenu dans une bande

$$\{x = (x_1, \ldots, x_N);\ a \leq x_N \leq b\}.$$

Posons $x = (x', x_N)$ où $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$. On peut écrire

$$\widetilde{v}(x', x_N) = \int_a^{x_N} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_N}(x', s)\, ds.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz on a :

$$\begin{aligned} |\widetilde{v}(x', x_N)|^2 &\leq (x_N - a) \int_a^{x_N} \left| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_N}(x', s) \right|^2 ds \\ &\leq (x_N - a) \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_N}(x', s) \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{v}(x', x_N)|^2 \, dx' \leq (x_N - a) \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_N} \right|^2 \, dx.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{v}|^2 \, dx' = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{v}(x', x_N)|^2 \, dx' \right) \, dx_N \leq \frac{1}{2} \, (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_N} \right|^2 \, dx.$$

On obtient ainsi pour tout $v \in \mathscr{D}(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \, (b-a)^2 \, \left\| \frac{\partial v}{\partial x_N} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Par densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on obtient la même inégalité pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Remarque 3.3.1 *La démonstration du théorème précédent montre que l'inégalité de Poincaré est vraie pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles au moins sur une partie de mesure non nulle du bord. Sinon, si on choisit par exemple $v = 1$, l'inégalité est trivialement fausse.*

Corollaire 3.3.1 *On définit sur $H^1(\Omega)$ la semi-norme :*

$$|v|_{H^1(\Omega)} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

L'inégalité de Poincaré nous montre qu'en fait cette semi-norme est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$.

3.4 Notion de trace

Comme nous n'avons l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ pour $N > 1$, il n'est *a priori* pas possible de définir la valeur d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ en tout point de Γ, frontière de Ω.

Théorème 3.4.1 *On suppose que Γ est suffisamment régulière. Alors $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Théorème 3.4.2 *On suppose que Γ est suffisamment régulière. Alors l'application*

$$Tr : v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mapsto Tr\, v = v_{|\Gamma} \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$$

se prolonge par continuité en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, i.e. on a :

$$\|Tr\, v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \, \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par le théorème 3.2.2 on peut donc écrire :

$$H_0^1(\Omega) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} = \{v \in H^1(\Omega);\ \mathrm{Tr}\, v = v_{|\Gamma} = 0\}.$$

Le résultat suivant étend la formule de Green aux espaces de Sobolev.

Théorème 3.4.3 (Formule de Green) *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ suffisamment régulière. On a pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$ l'identité :*

$$\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Gamma uvn_i\, ds \qquad 1 \leq i \leq N,$$

où n_i est la $i^{ème}$ composante de la normale unité extérieure à Γ.

Démonstration. Il est clair que ce résultat est vrai pour tout $u, v \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ permet de "passer à la limite". □

3.5 Les espaces $H^k(\Omega)$

Pour tout entier $k \geq 1$, on désigne par $H^k(\Omega)$ l'espace

$$H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq k\}.$$

On munit l'espace $H^k(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} := \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v \right) dx$$

et de la norme associée :

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} = (v,v)^{\frac{1}{2}}_{H^k(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On s'intéresse plus particulièrement au cas $k = 2$. Si Ω est borné et de frontière assez régulière, on peut définir la trace $\mathrm{Tr}\, v = v_{|\Gamma} \in L^2(\Gamma)$ d'une fonction $v \in H^2(\Omega)$. De plus, puisque $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, on peut définir la trace :

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|_\Gamma \in L^2(\Gamma).$$

Ainsi la dérivée normale

$$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\Gamma = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i\Big|_\Gamma$$

a un sens comme fonction de $L^2(\Gamma)$. Donc l'application

$$\mathrm{Tr} : v \in H^2(\Omega) \mapsto \left(v_{|\Gamma}, \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\Gamma \right) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$$

est linéaire et continue.

Théorème 3.5.1 (Formule de Green) *Pour tous* $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ *on a*

$$-\int_\Omega v\Delta u\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,ds.$$

Théorème 3.5.2 *Soit* $H_0^2(\Omega)$ *la fermeture de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *dans* $H^2(\Omega)$. *On a*

$$H_0^2(\Omega) = \mathit{Ker\,Tr} = \{v \in H^2(\Omega);\ v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Théorème 3.5.3 *On a l'injection* $H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ *pour* $m < 4$.

4

Séries de Fourier

4.1 Bases d'un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$, et soit une suite $(e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$ d'éléments de H.

Définition 4.1.1 *On dit que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base orthonormée de H si :*

1. $\langle e_p,\, e_q \rangle = 0$ *pour tous* $p \neq q$ *et* $\langle e_p,\, e_p \rangle = 1$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
2. *Tout vecteur orthogonal à tous les vecteurs* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est nul.*

On dit alors que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.

Le but ici est de construire une approximation d'un élément quelconque de H en utilisant des éléments d'une base. Dans ce qui suit, on désigne par H_p l'espace vectoriel engendré par $(e_0, e_1, \dots, e_p)$, *i.e.*

$$H_p = \big\{u \in H;\ u = \sum_{i=0}^{p} a_i e_i,\ a_i \in \mathbb{R}\big\}.$$

Théorème 4.1.1 *Soit $u \in H$ et $u_p = \sum_{i=0}^{p} \langle u,\, e_i \rangle e_i$. Alors*

1. u_p *est l'unique élément de* H_p *vérifiant*

$$\langle u,\, v \rangle = \langle u_p,\, v \rangle \qquad \forall\, v \in H_p.$$

   On dit alors que u_p est la projection orthogonale de u sur H_p.

2. u_p *est l'unique élément de* H_p *vérifiant*

$$\|u - u_p\| \leq \|u - v\| \qquad \forall\, v \in H_p.$$

   On dit alors que u_p est la meilleure approximation de u au sens de la norme, par un élément de H_p.

3. *On a*
$$\lim_{p\to\infty} \|u-u_p\| = 0.$$
On peut ainsi noter
$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \langle\, u,\, e_i \,\rangle e_i.$$
De plus
$$\|u\|^2 = \lim_{p\to\infty} \|u_p\|^2 = \lim_{p\to\infty} \sum_{i=0}^{p} |\langle\, u,\, e_i \,\rangle|^2;$$
ou encore
$$\|u\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\langle\, u,\, e_i \,\rangle|^2.$$

Exemple 4.1.1 *On considère les fonctions*
$$\begin{aligned} &R_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \\ &C_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(\frac{2\pi t}{T}\big), \qquad && C_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(\frac{4\pi t}{T}\big), \\ &S_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\big(\frac{2\pi t}{T}\big), && S_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\big(\frac{4\pi t}{T}\big), \end{aligned}$$
pour $t > 0$. On peut vérifier que ces cinq fonctions sont orthonormées pour le produit scalaire
$$\langle\, u,\, v \,\rangle = \int_0^1 u(s)v(s)\, ds.$$
Soit $f \in L^2(]0,T[)$ et soit H l'espace engendré par les fonctions R_0, S_1, S_2, C_1, C_2. La projection de f sur H est donnée par
$$\varphi(t) = \langle\, f,\, R_0 \,\rangle R_0 + \langle\, f,\, C_1 \,\rangle C_1 + \langle\, f,\, C_2 \,\rangle C_2 + \langle\, f,\, S_1 \,\rangle S_1 + \langle\, f,\, S_2 \,\rangle S_2.$$
Donc
$$\varphi(t) = a_0 + a_1\cos\big(\frac{2\pi t}{T}\big) + b_1\sin\big(\frac{2\pi t}{T}\big) + a_2\cos\big(\frac{4\pi t}{T}\big) + b_2\sin\big(\frac{4\pi t}{T}\big),$$
avec
$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\, ds, \\ &a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(s)\cos\big(\frac{2\pi s}{T}\big)\, ds \qquad && a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(s)\cos\big(\frac{4\pi s}{T}\big)\, ds, \\ &b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(s)\sin\big(\frac{2\pi s}{T}\big)\, ds, && b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(s)\sin\big(\frac{4\pi s}{T}\big)\, ds. \end{aligned}$$

4.2 Séries de Fourier

L'exemple précédent montre que les fonctions trigonométriques des arcs multiples de $2\pi t/T$ forment une base de $L^2(]0,T[)$. *Écrire une fonction de $L^2(]0,T[)$ dans cette base c'est la développer en série de Fourier.*
Nous obtenons immédiatement le résultat suivant.

Lemme 4.2.1 *La suite de fonctions*

$$\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(\frac{2\pi t}{T}\big),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\big(\frac{2\pi t}{T}\big),\dots,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big),\dots$$

pour $n \geq 1$ forme une base orthonormée de l'espace $L^2(]0,T[)$.

Définition 4.2.1 *Soit f une fonction de $L^2(]0,T[)$. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres réels suivants :*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds, \tag{4.1}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(s)\cos\big(\frac{2\pi ns}{T}\big)\,ds, \qquad n \geq 1, \tag{4.2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(s)\sin\big(\frac{2\pi ns}{T}\big)\,ds, \qquad n \geq 1. \tag{4.3}$$

Soit H_p l'espace engendré par les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(\frac{2\pi t}{T}\big),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\big(\frac{2\pi t}{T}\big),\dots,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(\frac{2\pi pt}{T}\big),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\big(\frac{2\pi pt}{T}\big).$$

Théorème 4.2.1 *Pour $p \geq 1$, la fonction*

$$f_p(t) := a_0 + \sum_{n=1}^{p} a_n\cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) + \sum_{n=1}^{p} b_n\sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big),$$

où les coefficients a_0, a_n, b_n sont donnés par (4.1)–(4.3)*, est la meilleure approximation de f, dans H_p, au sens de la norme. De plus, on a*

$$\|f_p\|^2 = T|a_0|^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{p}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Théorème 4.2.2 *(Identité de Parseval)*
On a

$$\lim_{p\to\infty}\|f - f_p\|_{L^2(0,T)} = 0.$$

De plus

$$\|f\|^2_{L^2(0,T)} = \int_0^T |f(s)|^2\,ds = T|a_0|^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Exemple 4.2.1 *On prend $T = 1$ et $f(t) = t$. Les coefficients de Fourier de f sont donnés par :*

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \int_0^1 2s\cos(2\pi ns)\,ds = 0, \\ b_n &= \int_0^1 2s\sin(2\pi ns)\,ds = -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

4.3 Série de Fourier d'une fonction périodique

Soit f une fonction (signal) périodique de période T (ou T–périodique) et telle que

$$\int_0^T f^2(s)\,ds < \infty.$$

Cette quantité représente *l'énergie dissipée pendant une période* et la quantité

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(s)\,ds$$

représente *la puissance moyenne du signal*.
Soit φ la fonction définie sur $[0, T]$ coïncidant avec f sur $[0, T]$. La série de Fourier de φ s'appelle aussi série de Fourier de f. Comme f est périodique, on peut calculer les coefficients de Fourier de f en intégrant sur n'importe quel intervalle de longueur T.

Définition 4.3.1 *Une fonction f est dite* continue par morceaux dans l'intervalle $[a, b]$ *s'il existe un nombre fini de points*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = b$$

tels que :

(i) *f est continue dans $]t_i, t_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq m$;*

(ii) *les limites à gauche et à droite de f aux points $t_0, \ldots, t_{m+1}$ existent et sont finies.*

Une fonction f est dite continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ *si elle est continue par morceaux sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.*

Définition 4.3.2 *Soit f une fonction T–périodique telle que*

$$\int_0^T f^2(s)\,ds < \infty.$$

Les nombres :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_h^{T+h} f(s)\,ds,$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_h^{T+h} f(s)\cos\big(\frac{2\pi ns}{T}\big)\,ds, \quad n \geq 1,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_h^{T+h} f(s)\sin\big(\frac{2\pi ns}{T}\big)\,ds, \quad n \geq 1.$$

s'appellent coefficients de Fourier *de f, pour tout h. L'expression*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\big(\frac{2\pi ns}{T}\big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\big(\frac{2\pi ns}{T}\big)$$

s'appelle développement en série de Fourier *de f. Notons que cette expression existe dans $L^2(0,T)$.*

Théorème 4.3.1 *(Théorème de Dirichlet)*
Soit f une fonction T–périodique et continue par morceaux. La série de Fourier de f converge ponctuellement vers la fonction

$$g(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

où

$$f(t^+) = \lim_{x\to t, x>t} f(x), \;\; f(t^-) = \lim_{x\to t, x<t} f(x).$$

On peut donc écrire

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) + b_n \sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big)\right)$$

en tout point t de continuité de f.

Théorème 4.3.2 *Soit f une fonction T–périodique, continue et telle que f' est continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.*

Théorème 4.3.3 *Soit f une fonction T–périodique continue et de dérivée continue par morceaux et soit*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) + b_n \sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big)\right)$$

la série de Fourier de f. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{T}\left(b_n \cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) - a_n \sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big)\right).$$

est la série de Fourier de f'.

Exemple 4.3.1 *Soit la fonction $f(t) = t^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Prolongeons f en une fonction de période 1.*
On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}, \\ a_n &= 2\int_0^1 t^2 \cos(2\pi nt) \, dt = \frac{1}{n^2\pi^2}, \\ b_n &= 2\int_0^1 t^2 \sin(2\pi nt) \, dt = -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

La série de Fourier de f s'écrit donc

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(2\pi nt) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi nt).$$

Pour $t = 0$, on obtient la série

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2}.$$

On a bien

$$\frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}.$$

Pour construire une série de Fourier convergeant uniformément vers f, on prolonge d'abord f par parité sur l'intervalle $[-1, 0]$, puis on prolonge la fonction résultante par 2–périodicité.
La fonction ainsi construite est continue et sa dérivée est continue par morceaux. On a ainsi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3}, \quad a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n, \\ b_n &= 0 \qquad \textit{car } f \textit{ est paire et } \sin(n\pi t) \textit{ est impaire.} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi t.$$

4.4 Représentation complexe des séries de Fourier

Soit f une fonction continue par morceaux et T–périodique et soit

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) + b_n \sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) \Big)$$

sa série de Fourier. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{2\pi int}{T}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{2\pi int}{T}} &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\Big(\cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) + i\sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big)\Big)\\ &\quad + \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\Big(\cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) + i\sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big)\Big)\\ &= a_n \cos\big(\frac{2\pi nt}{T}\big) + b_n \sin\big(\frac{2\pi nt}{T}\big).\end{aligned}$$

La série de Fourier de f s'écrit donc

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{\frac{2\pi int}{T}} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-\frac{2\pi int}{T}}\Big).$$

Posons

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0,\\ c_n &= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n = -1, -2, \dots \end{cases}\end{aligned}$$

La série de Fourier est alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}.$$

Exprimons les coefficients c_n en fonction de f. On a

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\, ds.$$

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s) e^{-\frac{2\pi ins}{T}}\, ds.$$

Pour $k = -1, -2, \dots$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s) e^{-\frac{2\pi ins}{T}}\, ds.$$

Ainsi la représentation complexe de la série de Fourier de f s'écrit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi int}{T}}\, dt \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Notons que la p^{e} somme partielle

$$S_p(t) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}$$

est réelle.

Définition 4.4.1

1. *On appelle les réels*
$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$
les fréquences angulaires*,* ω_1 *est appelée* fréquence fondamentale *et* $\omega_2, \ldots,$ fréquences harmoniques*.*
2. *Les coefficients* c_n *constituent le* spectre *de* f*.*
3. *La fonction* $\omega_n \mapsto |c_n|$ *est* le spectre d'amplitude*.*
4. *La fonction* $\omega_n \mapsto Arg(c_n)$ *est* le spectre de phase*.*

5

La transformée de Fourier

5.1 Introduction

Soit f une fonction continue par morceaux et de dérivée continue par morceaux sur un intervalle $[-L, L]$, $a > 0$. Sa série de Fourier (complexe) converge pour tout $t \in [-L, L]$ vers la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)) & \text{si } -L < x < L, \\ \frac{1}{2} f(-L^+) & \text{si } x = -L, \\ \frac{1}{2} f(L^-) & \text{si } x = a - L. \end{cases}$$

On peut donc écrire pour tout $x \in [-L, L]$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y) e^{\frac{ik\pi}{L}(x-y)}\, dy.$$

Supposons f continue par morceaux et de dérivée continue par morceaux sur tout $\mathbb{R}$, la formule ci–dessus est valable pour tout $L > 0$.

Que se passe-t-il si on fait tendre L vers $+\infty$?
Autrement dit : une fonction définie sur un intervalle borné étant représentée par sa série de Fourier, comment peut-on représenter de manière analogue une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$?
Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. La fonction

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x)\, dx$$

s'appelle *transformée de Fourier* de f. Notons que cette fonction est à valeurs complexes.

Remarque 5.1.1 *Dans certaines versions, on peut adopter la définition suivante de la transformée de Fourier :*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx,$$

ou encore

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

Lemme 5.1.1 *$\widehat{f}(\xi)$ est défini pour tout ξ et $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.*

Démonstration. Immédiat, il suffit de voir que

$$|e^{-2\pi i\xi x} f(x)| = |f(x)|.$$

Lemme 5.1.2 *L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.*

Proposition 5.1.1 *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$. De plus, l'application*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$$

est linéaire et continue et on a

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Démonstration. La linéarité est immédiate. Pour montrer la continuité, on considère la fonction $g(x,\xi) = e^{-2\pi i\xi} f(x)$. On montre que l'application $\xi \mapsto g(x,\xi)$ est continue par le théorème de la convergence dominée.
Supposons que f est continue et à support borné dans $\mathbb{R}$. Alors f est intégrable ainsi que sa dérivée f'. Soit M assez grand pour que $\operatorname{supp}(f) \subset [-M, M]$. Autrement dit, f est nulle en dehors de $]-M, M[$. En utilisant l'intégration par parties, on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi it\xi} f(x)\, dx &= -\int_{-M}^{M} e^{-2\pi it\xi} f(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i\xi}\Big(\Big[e^{-2\pi i\xi t} f(x)\Big]_{-M}^{M} - \int_{-M}^{M} e^{-2\pi it\xi} f'(x)\, dx\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi i\xi}\int_{-M}^{M} e^{-2\pi it\xi} f'(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \Big|\frac{1}{2\pi i\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi it\xi} f'(x)\, dx\Big| \leq \frac{1}{2\pi|\xi|}\|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On en déduit que

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Dans le cas général, on sait que l'espace des fonctions $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon/2$. Il en découle que $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)| \leq \varepsilon/2$, pour tout ξ. Ainsi si $|\xi|$ est grand alors $|\widehat{\varphi}(\xi)| < \varepsilon/2$ et $|\widehat{f}(\xi)| < \varepsilon$. □

Exemple 5.1.1 *Soit, pour $a > 0$, la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2a} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} a\,dx = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx \\
&= a\int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{-2\pi i\xi x}\,dx \\
&= \frac{a}{\pi\xi}\sin\big(\frac{\pi\xi}{a}\big).
\end{aligned}$$

Proposition 5.1.2

1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f(x) = g(-x)$. On a*
$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi),\ \widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}.$$
La transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire est donc réelle, celle d'une fonction réelle et impaire est imaginaire pure.
2. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g(x) = f(ax)$. Alors*
$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\big(\frac{\xi}{a}\big).$$
3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g(x) = e^{2\pi i a x}f(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Alors*
$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a).$$
4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f est continue et f' continue par morceaux. Alors*
$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi) \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

1. On a
$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x}f(-x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} -e^{2\pi i\xi u}f(u)\,du = \widehat{f}(-\xi).$$
2. $$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x}f(ax)\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi u/a}f(u)\,du = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\big(\frac{\xi}{a}\big).$$
3. $$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x+2\pi i a x}f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x(\xi-a)}\,dx = \widehat{f}(\xi - a).$$
4. $$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x}f'(x)\,dx \\
&= \big[e^{-2\pi i\xi x}f(x)\big]_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i\xi\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x}f(x)\,dx \\
&= 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi). \quad \square
\end{aligned}$$

5.2 Convolution

De nombreux appareils de mesures physiques peuvent être caractérisés par le fait suivant :
On introduit dans l'appareil une grandeur e et on obtient en sortie une fonction :

$$s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(y)h(x-y)\,dy.$$

La fonction h caractérise l'appareil.
Soit donc deux fonctions $f,\ g$. La fonction

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

s'appelle, quand elle existe, *le produit de convolution de f et g.*

Proposition 5.2.1

1. *Si $f * g$ existe, $g * f$ existe aussi et $f * g = g * f$.*
2. *Si $f_1 * g$ et $f_2 * g$ existent alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ la fonction $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g$ existe et on a :*
$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1(f_1 * g) + \lambda_2(f_2 * g).$$

Théorème 5.2.1

1. *Pour tous $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et on a*
$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$
2. *Pour tous $f,\ g,\ h \in L^1(\mathbb{R})$, on a*
$$(f * g) * h = f * (g * h).$$
3. *Si*
$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ et } g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \qquad \text{dans } L^1(\mathbb{R}),$$
alors
$$f_n * g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f * g \qquad \text{dans } L^1(\mathbb{R}).$$

Démonstration.

1. Si $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$, on a
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g|(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right) dt.\end{aligned}$$

   Or

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|g(y)|\,dx\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-y)|\,|g(y)|\,dt\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-y)|\,|g(y)|\,dt\right)dy.$$

2. Puisque $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $g * h \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(f * g) * h$ et $f * (g * h)$ existent.

$$(f * g) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t-u)h(u)\,du$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t-u-v)g(v)\,dv\right)h(u)\,du$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(t-u-v)g(v)h(u)\,du\,dv$$

d'après le théorème de Fubini. De même

$$f * (g * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-z)(g * h)(z)\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t-z)g(z-u)h(u)\,du\,dz.$$

Soit $v = z - u$. On a

$$f * (g * h)(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t-u-v)g(v)h(u)\,du\,dv.$$

3. D'après ce qui précède, on a :

$$f_n * g_n - f * g = (f_n - f) * g_n + f * (g_n - g).$$

Donc
$$\|f_n * g_n - f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|(f_n - f) * g\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|f * (g_n - g)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Or
$$\|f * (g_n - g)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|g_n - g\|_{L^1(\mathbb{R})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\|(f_n - f) * g_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|g_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$$
$$\leq C\|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Théorème 5.2.2 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. *Si g est bornée, $f * g$ est bornée et on a, si $|g(t)| \leq C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$|f * g(t)| \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

2. *Soit g bornée et continue, alors $f * g$ est continue. Si g' existe et est bornée alors $(f * g)'$ existe et on a :*

$$(f * g)' = f * g'.$$

3. *Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $f * g$ existe et $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ et*

$$\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Théorème 5.2.3 *Soit f, g dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

De plus, si $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ou $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi t} f * g(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi t}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\, du\Big)\, dt.
\end{aligned}$$

Or la fonction $|e^{-2\pi i\xi t} f(t-u)g(u)|$ est sommable ; on peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi(t-u)} e^{-2\pi i\xi u} f(t-u)g(u)\, dt\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi z} f(z) e^{-2\pi i\xi u}\, dz\, du \\
&= \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se démontre de manière analogue. □

On s'intéresse maintenant aux hypothèses sous lesquelles on peut calculer f à partir de sa transformée de Fourier. Pour cela, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\check{f}$ la fonction définie par

$$\check{f}(t) = \overline{\widehat{\overline{f}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\xi t} f(\xi)\, d\xi.$$

Théorème 5.2.4

1. *Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et si f est continue, on a :*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\xi t}\widehat{f}(\xi)\, d\xi = \overline{\widehat{\overline{\widehat{f}}}}(t).$$

2. *Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a :*

$$\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = \overline{\widehat{\widehat{f}}}(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\overline{\widehat{\widehat{f}}} = f$ presque partout.*

On appelle alors $\check{f} = \overline{\widehat{f}}$ la transformée de Fourier inverse de f.

5.3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; f a une transformée de Fourier. On peut obtenir des propriétés supplémentaires sur f et sa transformée.

Théorème 5.3.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On a les propriétés suivantes :*

1. *$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.*
2. *Si $f,\ g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a l'égalité de Parseval :*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\, dt.$$

3. *On a*

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-2\pi i t\xi} f(t)\, dt,$$

la limite étant dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 5.3.1 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit $(\widehat{f}_n)$ la suite de fonctions définies par*

$$\widehat{f}_n(\xi) = \int_{-n}^{n} e^{-2\pi i\xi t} f(t)\, dt,$$

On appelle transformée de Fourier de f la fonction $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ définie presque partout par :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Théorème 5.3.2

1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi.$$

En particulier, on a l'identité de Parseval–Plancherel :

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

2. *Si* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R})$ *alors* $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ *et*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

Exemple 5.3.1 *Soit*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & si\ t \neq 0, \\ 0 & si\ t = 0. \end{cases}$$

On peut vérifier que $f \notin L^1(\mathbb{R})$ *et* $f \in L^2(\mathbb{R})$. *Soit la fonction*

$$g(t) = \begin{cases} \pi & si\ -\frac{1}{2\pi} \leq t \leq \frac{1}{2\pi}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Donc

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} e^{-2\pi i \xi t} = \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

D'où

$$g(t) = \lim_{n \to \infty} L^2 \int_{-n}^{n} e^{2\pi i \xi t} \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi.$$

Comme g *est réelle :*

$$g(t) = \lim_{n \to \infty} L^2 \int_{-n}^{n} e^{-2\pi i \xi t} \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi = \widehat{f}(t).$$

De plus, par la relation de Parseval–Plancherel, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \pi^2\, dt = \pi.$$

5.4 Transformée de Fourier d'une distribution

On désigne par $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'espace suivant :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R});\ |(1+x^2)^p \varphi^{(k)}| \leq C(p,k)\ \forall\, p, k \in \mathbb{N}\}.$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On note par $\widehat{\varphi}$ la transformée de Fourier de φ.

Définition 5.4.1 *Une distribution tempérée est une application linéaire continue*

$$T : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}.$$

La continuité ici est dans le sens suivant :

$$\varphi_n \to \varphi \implies \langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Notons que si (φ_n) est une suite de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ convergeant vers φ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, alors φ_n converge vers φ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (puisque $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$). Donc, une distribution tempérée est une distribution.
Soit T une distribution tempérée. On définit la transformée de Fourier de T par :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

On peut alors montrer que $\widehat{T}$ est aussi une distribution tempérée.

Exemple 5.4.1 *Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On a*

$$\langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt = \langle 1, \varphi \rangle.$$

La transformée de Fourier de la masse de Dirac (comme distribution tempérée) est donc égale à 1.

5.4.1 Un exemple fondamental

Soit $T > 0$. On définit la distribution :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}.$$

Calculons la transformée de Fourier de f. On a :

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\delta}_{nT}, \varphi \rangle &= \langle \delta_{nT}, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(nT) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i n T t} \varphi(t)\, dt \\
&= \langle e^{-2\pi i n T t}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n T \xi}.$$

On peut alors montrer que

$$\widehat{f} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{n}{T}}.$$

On peut ainsi énoncer, sans démonstration, la propriété fondamentale suivante :

La transformée de Fourier de la distribution temporelle comportant une masse unitaire en chaque point dont l'abscisse est un multiple entier de T est une distribution fréquentielle comportant la masse $1/T$ aux points dont l'abscisse est un multiple entier de $1/T$.

5.5 L'échantillonnage

On appelle *échantillonnage* toute opération consistant à représenter un signal $f(t)$ (fonction du temps) par ses valeurs $f(nT)$ à des instants multiples entiers d'une durée T, appelée *période d'échantillonnage*.
Soit f une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,T]$. La série de Fourier (convergeant vers f) de f s'écrit

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) e^{\frac{2\pi i n t}{T}}, \qquad t \in [0,T],$$

avec

$$a(n) := \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} f(t)\,dt \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Soit maintenant la fonction g, de période T et coïncidant avec f sur $[0,T]$. On a $g \notin L^2(\mathbb{R}) \cup L^1(\mathbb{R})$. Donc, g n'a pas de transformée de Fourier. Soit h le prolongement de f par zéro en dehors en $[0,T]$. On a $h \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\widehat{h}(\xi) = \int_0^T e^{-2\pi i \xi t} f(t)\,dt.$$

Donc

$$a(n) = \frac{1}{T}\widehat{h}\left(\frac{n}{T}\right) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

et $h = \widehat{\widehat{\widehat{h}}}$ presque partout. Ainsi, g et a se comportent comme h et $\widehat{h}$ alors que ni g ni a n'ont de transformée de Fourier.
Si on considère maintenant f, $\widehat{h}$ et a ; la donnée de l'une d'elles détermine les deux autres. En particulier, la connaissance de $\widehat{h}$ aux points n/T suffit pour connaître a, donc f, donc $\widehat{h}$ en tout point.

Théorème 5.5.1 *Soit f une fonction continue et sommable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est nulle en dehors du segment $[-\xi_0, \xi_0]$. Soit $\xi > \xi_0$; alors f est déterminée pas ses valeurs aux points $\frac{n}{2\xi}$ par la formule :*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2\xi}\right) \frac{\sin \pi(n-2\xi t)}{\pi(n-2\xi t)}.$$

5.5.1 Signaux à temps continu

Il s'agit de signaux $f(t)$ indexés par $\mathbb{R}$.

Définition 5.5.1 .

1. *Un signal f indexé par $\mathbb{R}$ est dit* d'énergie finie *si $f \in L^2(\mathbb{R})$.*
2. *On appelle $\widehat{f}$ le* spectre d'énergie *(ou* spectre d'amplitude *ou* spectre*) du signal f.*
3. *La fonction $|\widehat{f}|^2$ s'appelle* densité spectrale d'énergie.

4. *Soit f un signal d'énergie finie et soit K la fonction*

$$K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(s)} f(s+t)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(s-t)} f(s)\, ds.$$

On appelle K fonction d'auto-corrélation d'énergie *du signal f.*

5.5.2 Signaux échantillonnés

Définition 5.5.2

1. *Un signal f échantillonné (indexé par $\mathbb{Z}$) est dit d'énergie finie si*

$$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 < +\infty.$$

2. *La fonction $\widehat{f}$ s'appelle* spectre d'énergie *(ou* spectre d'amplitude *ou* spectre*) de f.*
3. *La fonction*

$$K : p \in \mathbb{Z} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) f(n+p)$$

s'appelle auto-corrélation temporelle *(en énergie) de f.*

Théorème 5.5.2 *On a*

$$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 = \int_0^1 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \int_0^1 |\widehat{K}(\xi)|\, d\xi.$$

L'opération d'échantillonnage peut être réalisée en utilisant les distributions. Soit f un signal continu temporel (indexé par $\mathbb{R}$). On a déjà vu que la distribution de masses de Dirac unitaires aux points de l'axe réel multiples entiers de la période T, associe à f l'ensemble de ses valeurs $f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$. Cette distributions est donnée par

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{-nT}.$$

Considérons maintenant l'identité

$$\widehat{f} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{-\frac{n}{T}}.$$

On montre que

$$u(t) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.$$